



CIRRELT

Centre interuniversitaire de recherche
sur les réseaux d'entreprise, la logistique et le transport

Interuniversity Research Centre
on Enterprise Networks, Logistics and Transportation

Algorithme robuste pour l'évaluation de la fiabilité des réseaux sujets à des défaillances aléatoires

Mohamed-Larbi Rebaiaia
Daoud Ait-Kadi

Décembre 2013

CIRRELT-2013-74

Bureaux de Montréal :
Université de Montréal
Pavillon André-Aisenstadt
C.P. 6128, succursale Centre-ville
Montréal (Québec)
Canada H3C 3J7
Téléphone : 514 343-7575
Télécopie : 514 343-7121

Bureaux de Québec :
Université Laval
Pavillon Palais-Prince
2325, de la Terrasse, bureau 2642
Québec (Québec)
Canada G1V 0A6
Téléphone : 418 656-2073
Télécopie : 418 656-2624

www.cirrelt.ca

Algorithme robuste pour l'évaluation de la fiabilité des réseaux sujets à des défaillances aléatoires

Mohamed-Larbi Rebaiaia*, Daoud Ait-Kadi

Centre interuniversitaire de recherche sur les réseaux d'entreprise, la logistique et le transport (CIRRELT) et Département de génie mécanique, 1065, avenue de la Médecine, Université Laval, Québec, Canada G1V 0A6

Résumé. Dans cet article, nous proposons un ensemble de techniques analytiques pour l'évaluation exacte de la fiabilité des réseaux. L'algorithme général permet d'effectuer des remplacements des structures topologiques complexes identifiées dans le réseau par des sous-structures plus simples. Dans le cas général, ce processus s'appelle réduction polygone-à chaîne. Le principe utilise les techniques de décomposition et de réduction basées sur le théorème de factorisation de Moore et Shannon. L'objectif est de montrer que même dans le cas où les nœuds et les liens d'un réseau stochastique peuvent être sujets à des défaillances, l'évaluation de la fiabilité devient aisée une fois le réseau est prouvé décomposable. Pour cela, nous proposons des outils mathématiques et un algorithme qui permettent de calculer la fiabilité en temps linéaire.

Mots-clés. Fiabilité des réseaux, méthodes de décomposition polygone à chaîne, théorème de factorisation, NP-complexité.

Remerciements. Ce travail a été partiellement financé, dans le cadre du projet Réseau national intégré de radiocommunication (RENIR), par le Centre de services partagés du Québec (CSPQ) et par le Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie (CRSNG). Nous tenons à les remercier vivement ainsi que l'équipe FORAC et le CIRRELT pour avoir mis à notre disposition les moyens nécessaires pour mener à bien nos travaux.

Results and views expressed in this publication are the sole responsibility of the authors and do not necessarily reflect those of CIRRELT.

Les résultats et opinions contenus dans cette publication ne reflètent pas nécessairement la position du CIRRELT et n'engagent pas sa responsabilité.

* Auteur correspondant: Mohamed-Larbi.Rebaiaia@cirrelt.ca

1. Introduction

Dans ce papier, nous nous intéressons au développement d'un ensemble de modèles analytiques pour l'évaluation de la fiabilité des réseaux. Les réseaux dans notre cas peuvent représenter la structure de systèmes dans un sens large (transport, logistique, télécommunication, informatique, systèmes embarqués, etc.) Pour cela, nous utilisons le concept de réseaux stochastiques pour modéliser le fonctionnement de ces systèmes qui sont supposés être sujets à des bris aléatoires. Le réseau ainsi formé est composé de nœuds reliés par des connexions (liens). Ces nœuds et ces liens peuvent dans la pratique ne pas fonctionner correctement (Rebaiaia et al., 2010), (Rebaiaia, 2011).

Pour évaluer la fiabilité du système, il est nécessaire de connaître la fiabilité de chacun de ses composants ainsi que sa structure. Dans la pratique, il n'existe pas une forme générale et unificatrice pour un tel calcul, sauf dans le cas où les structures sont des cas particuliers de type-- parallèle, série, série-parallèle, standby, k-parmi-n, etc. (voir table 1). Pour les réseaux, les méthodes principales d'évaluation de la fiabilité sont fondamentalement basées sur l'exploitation des chemins et des coupes minimales (Lin *et al.*, 2003), (Rebaiaia et al., 2012), (Rebaiaia et Ait-Kadi, 2012) les méthodes de réduction (Rebaiaia et al., 2009), des sommes de produit-disjoints (Abraham, 1979), (Heidtmann, 1989), (Locks, and Wilson, 1992), des diagrammes binaires de décision (Liu et al. 1993), (Bryant, 1986), (Rebaiaia et Ait-Kadi, 2012) et le concept d'inclusion-exclusion (Dohmen, 1998). Le problème d'évaluation de la fiabilité dans ces cas, est un problème NP-difficile (Valian, 1979) d'où la nécessité de développer de nouveaux outils de calcul pour à la fois évaluer la fiabilité du réseau et optimiser sa conception. Cependant, les méthodes proposées dans la littérature traitent de configurations particulières d'où leur performance a été évaluée pour de cas simples dont la valeur de la fiabilité est connue ou aisée à évaluer.

En face de la complexité des réseaux modernes, il devient important de proposer de nouvelles techniques plus efficaces. Tout au long de ces dernières décennies, certaines méthodes ont été élaborées, comme celle de Moskowitz (1958). Ce dernier a introduit une solution qui utilise le théorème de décomposition par factorisation basée sur le théorème de Moore et Shannon (1956). Depuis lors, de nombreux articles ont été consacrés à ces idées, comme ceux de Misra (1970), Murchland (1973), Rusenthal (1974) et Nakazawa (1976).

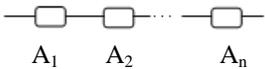
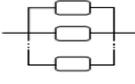
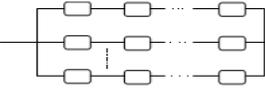
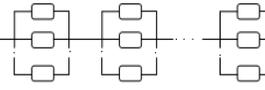
D'autres travaux plus intéressants ont été publiés par Satyanarana *et* Chang (1983), Satyanarana *et* Wood (85), Wood (86), (Rebaiaia *et al.*, 2009, 2010, et 2012) et dans lesquels leurs auteurs proposèrent un cadre unifié sur la base du théorème de factorisation permettant ainsi, d'évaluer la fiabilité des réseaux dont les nœuds sont totalement fiables (cas des réseaux parfaits). Il est bien connu que dans la pratique, les réseaux deviennent très sensibles et imposent le fait de considérer non seulement les liens mais aussi les nœuds comme probablement défaillants, c'est le cas par exemple des réseaux de transport et de télécommunication.

Le but de ce papier est précisément d'élargir les travaux de Satyanarana *et* Wood. (1985) et ceux de Theologou *et* Carlier (1991), pour le cas de réseaux dont les nœuds et les liens peuvent être défaillants. Dans la littérature, plusieurs chercheurs ont repris l'idée de réduction par factorisation polygone-à chaîne (Choi., 1995), (Fratta and Montanari, 1973), mais sans aller loin dans leur développement. Dans Theologou *et* Carlier (1991), les auteurs ont fait valoir que la décomposition polygone-à chaîne ne peut être appliquée lorsque les nœuds d'un réseau sont défaillants. Nous allons à travers ce travail montrer comme l'a fait Wood (1986) pour les cas des réseaux parfaits, qu'il est possible d'obtenir un algorithme polynomial pour les cas où les liens et les nœuds soient imparfaits. Cet algorithme permet de simplifier des graphes de type-1, de type-2 jusqu'au type-7 (voir de plus près Satyanarana *et* Wood (1985), (Simard, 1996), (Rebaiaia *et al.*, 2009), (Rebaiaia, 2011) pour comprendre cette notion de types) par application du théorème de factorisation. Nous démontrerons ensuite que les développements mathématiques prendront en charge d'un côté les réductions polygone-à chaîne de type 1 et de type 6 pour le cas où seuls les liens sont défaillants et de type 1 et de type 7 lorsque les liens et les nœuds sont imparfaits. Par similitude, les lecteurs intéressés peuvent très facilement retrouver les développements pour les autres sous-structures (type-2 par exemple). Cependant, il est utilisé de savoir que pour le cas parfait Satyanarana *et* Wood (1985) ont présenté une démonstration qui traite uniquement la réduction polygone-à chaîne du type 7 sans passer par le type 1. Nous nous sommes appliqués dans ce travail à démontrer de deux façons différentes la validité de quelques théorèmes en rapport avec la factorisation, ainsi qu'avec les travaux de Satyanarana *et* Wood que nous énoncerons par la suite. Pour le cas de la transformation polygone-à chaîne des réseaux imparfaits, à notre connaissance, c'est notre travail qui

aborde de façon unique, claire et détaillée cette problématique. Nous résumons dans la table 6 toutes les décompositions polygone-à chaîne dans le cas des réseaux imparfaits.

Le contenu de cet article est structuré comme suit: la section 2 présente les bases théoriques du principe de réduction, du théorème de factorisation et de la décomposition polygone-à chaîne. A la section 3, les modèles traitant la factorisation polygone-chaîne de type-1 et de type 6 sont détaillés, dans le cas où seuls les liens sont sujets aux défaillances. La section 4, traite l'application du principe de la factorisation dans le cas des réseaux imparfaits. L'algorithme et un exemple pratique sont résumés dans la section 5 et une conclusion est présentée dans la section 6.

Table 1. Structures simples, fonctions de structures et fonctions de fiabilités

Structures	Fonction de structure	Forme mathématique
 A	$\Phi(X(t)) =$ $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ fonctionne} \\ 0 & \text{si } i \text{ est en panne} \end{cases}$	$R(t)$
 A ₁ A ₂ ... A _n	$\Phi(X(t)) = \prod_{i=1}^n x_i(t)$	$R(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t)$
	$\Phi(X(t)) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i(t))$	$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t))$
	$\Phi(X(t)) = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - \prod_{j=1}^n x_{i,j}(t))$	$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - \prod_{j=1}^n R_{i,j}(t))$
	$\Phi(X(t)) = \prod_{i=1}^m (1 - \prod_{j=1}^n (1 - x_{i,j}(t)))$	$R(t) = \prod_{i=1}^m (1 - \prod_{j=1}^n (1 - R_{i,j}(t)))$
K parmi n	$\Phi(X(t)) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sum_j x_j(t) \geq k \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$	$R(t) = \sum_{j=k}^n C_n^j p^j (1-p)^{n-j}$

2. Préliminaires

2.1 Notions de base

Un réseau est un graphe $G = (V, E)$ où V est un ensemble fini de n nœuds (sommets) et E un ensemble fini de m arêtes qui sont les liens permettant de rendre possible la communication entre les nœuds. Si le graphe est orienté, on parlera d'arcs au lieu d'arêtes. On associe à chaque arc et à chaque nœud une probabilité de bon fonctionnement et on considère que ces dernières sont statistiquement indépendantes. Nous adoptons la notation s et t pour définir le choix du sommet source et du sommet de destination et l'on parlera alors d'un problème 2-terminaux, dit aussi terminal-paire (Deo *et* Medidi, 1992), (Yoo and Deo, 1988), (Dotson *et* Gobien, 1979). Pour certains réseaux, on peut en outre s'intéresser à l'évaluation de la probabilité que K -nœuds soient reliés entre eux, on parlera alors de la fiabilité K -terminaux notée $R(G_k)$ qui représente la probabilité que tous les K -nœuds soient reliés entre eux par une arborescence (noter que les K -nœuds sont dessinés par des ronds pleins). La généralisation d'une telle notion paraît nécessaire pour certaines classes de problèmes, dits tous-terminaux. Notez qu'un 2-terminaux suffit amplement à définir la fiabilité du réseau.

Dans la pratique deux situations peuvent se produire lorsqu'il est question de calculer la fiabilité d'un réseau. Soit que ce réseau est réductible et qu'on lui applique successivement une série de règles de réductions simples du type série, série-parallèle, réduction de degré-2, delta-étoile et vice-versa, ou bien, dans le cas contraire le graphe est alors irréductible (voir figure 1), on procède alors par l'application d'une série de réductions dites polygones-à chaînes (Theolougou *et* Carlier, 1991), (Wood, 1986).



Figure 1. Gauche : Graphe réductible

Droite : Graphe irréductible

Pour mieux expliquer la problématique de la factorisation, nous présentons dans ce qui suit, certaines définitions et formalismes qui seront utilisés comme éléments de base à notre contribution. Toutefois, il est important de noter que les opérations de réductions série-parallèle sur un graphe réductible peuvent être calculées en un temps linéaire et ceci dépendamment de la taille du graphe (Wood. 1985).

2.1.1 Principe du Théorème de Factorisation

Les méthodes de factorisation dites aussi de réduction, utilisent le théorème de factorisation de Moore & Shannon. Elles consistent essentiellement à décomposer un graphe en faisant des hypothèses sur l'état d'un composant, jusqu'à ce que l'on obtienne des graphes à configurations simples. Le théorème des probabilités totales permet alors de calculer la fiabilité du graphe à partir de sous-graphes ainsi obtenus. L'idée derrière ce processus étant de postuler dans un graphe qu'un arc e est bon ($\Phi(X(t)) = 1|x_e = 1$) revient à dire que la communication à travers cet arc est assurée. Le cas contraire s'écrit ($\Phi(X(t)) = 1|x_e = 0$). Dans un graphe orienté, une communication parfaite entre deux nœuds est équivalente à les fusionner en un seul nœud, et l'impossibilité de communiquer à travers un arc entraîne sa suppression. Il est à noter que $\Phi(X(t)) = 1$ signifie que la valeur de la fonction de structure étant égal à 1 lorsqu'on sait que $X(t)$ est un vecteur à valeurs aléatoires.

Considérons un graphe G dans lequel on choisit un composant j aléatoirement. Le théorème des probabilités totales permet pour ce composant j , d'exprimer la fiabilité du graphe G par :

$$\begin{aligned} R &= \Pr(\Phi(X(t)) = 1) \\ &= \Pr(\Phi(X(t)) = 1|x_j = 1) \times \Pr(x_j = 1) + \Pr(\Phi(X(t)) = 1|x_j = 0) \\ &\quad \times \Pr(x_j = 0) \end{aligned} \quad (1)$$

Si l'on substitue la probabilité $\Pr(x_j = 1)$ par R_j et $\Pr(x_j = 0)$ par $(1 - R_j)$ qui sont respectivement les probabilités de bon fonctionnement et de défaillance, Il s'ensuit, que :

$$\begin{aligned} R &= \Pr(\Phi(X(t)) = 1) \\ &= \Pr(\Phi(X(t)) = 1|x_j = 1) \times R_j + \Pr(\Phi(X(t)) = 1|x_j = 0) \times (1 - R_j) \end{aligned} \quad (2)$$

Ce processus de décomposition se poursuit autant de fois qu'il est nécessaire, autrement dit, jusqu'à ce qu'une structure simple soit trouvée (si elle existe) et dont la fiabilité est facile à évaluer. Il est à noter que le choix de certains composants peut parfois faciliter le nombre de décompositions, ce qui nécessite d'utiliser une heuristique pour le choix. Cette façon de raisonner permet de postuler qu'un lien entre deux nœuds est équivalent à fusionner ces deux nœuds en un seul. Le contraire, conduit à supprimer ce lien.

Notons que l'équation (2) est identique à l'équation (1) en supposant que si $e_i = (u, v)$ est un lien du graphe G_K et, F_i et \bar{F}_i dénotant respectivement que l'événement e_i (le composant) soit qu'il fonctionne, soit qu'il est défaillant. Nous rappelons que la probabilité p_i est égale à $1 - q_i$. On peut par la suite exprimer la fiabilité du réseau G_K par :

$$R(G_K) = p_i R(G_K | F_i) + q_i R(G_K | \bar{F}_i) = p_i R(G'_{K'}) + q_i R(G'_{K''}) \quad (3)$$

A partir du théorème des probabilités totales, certains auteurs ont énoncé simplement le théorème de factorisation, qui permet d'écrire que pour un composant e , choisi arbitrairement, la fiabilité du réseau (G) est exprimée par :

$$R(G) = p_e R(G * e) + (1 - p_e) R(G - e) \quad (4)$$

Où

$R(G)$: la fiabilité du réseau G .

$R(G * e)$: la probabilité que le système fonctionne lorsque le composant e fonctionne (l'arc e est contracté).

$R(G - e)$: la probabilité que le système fonctionne lorsque le composant e est défaillant (l'arc e est éliminé).

Et tel que :

$$G * e_i = (V - u - v + w, E - e_i), \text{ avec } w = u \cup v$$

$$G - e_i = (V, E - e_i)$$

$$K' = \begin{cases} K & \text{if } u, v \notin K \\ K - u - v + w & \text{if } u \in K \text{ ou } v \in K \end{cases} \quad (5)$$

$$K'' = K$$

Pour illustrer le théorème de factorisation nous présentons un graphe simple dit *Bridge network* ou *Pont de Königsberg* (figure 2). Pour cela, supposons que le composant 3 étant

l'élément pivot sur lequel portera notre choix, les différentes étapes de décomposition sont alors illustrées dans la figure suivante.

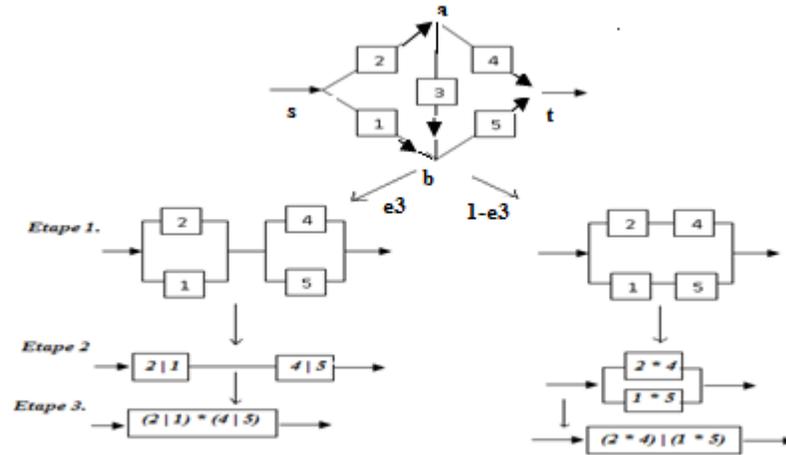


Figure 2. Décomposition du réseau *Pont de Königsberg*.

Connaissant la fiabilité p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5 de chaque composant ainsi que le composant pivot (ici le composant 3), la fiabilité du système peut être facilement évaluée à partir de relations résultantes identifiées par les feuilles de l'arbre de décomposition exprimée mathématiquement par l'équation (6).

$$\begin{aligned}
 R(G) &= p_e R(G * e) + (1 - p_e) R(G - e) \\
 &= p_3 [1 - (1 - p_1)(1 - p_2)] [1 - (1 - p_4)(1 - p_5)] \\
 &\quad + (1 - p_3) [1 - (1 - p_2 p_4)(1 - p_1 p_5)]
 \end{aligned} \tag{6}$$

Remarque 1: Pour identifier l'expression équivalente, nous avons procédé par séparation du graphe en deux parties, puis de proche en proche nous avons effectué des compositions parallèles et séries (voir figure 2). Le but est de ramener le réseau vers une structure simple à identifier. Le processus s'arrêtera lorsqu'il ne sera plus possible de faire des réductions simples.

Remarque 2: Compte tenu de la complexité de cette méthode qui est de nature exponentielle, il est souhaitable de réduire au maximum la taille du graphe avant d'appliquer le théorème de factorisation dans le cas où cette opération est possible. Pour cela les réductions suivantes sont nécessaires.

Le principe du théorème de factorisation permet de calculer la fiabilité de n'importe quel type de réseau, à condition qu'il soit décomposable. Donc, à chaque application du théorème de factorisation, on décompose le graphe en deux parties de tailles légèrement réduites, à savoir, $G * e$ qui est le graphe G avec un nœud et une liaison en moins, et $G - e$ avec une liaison en moins (arc, arête). Si n est le nombre de liaisons dans un réseau G , alors dans le pire des cas, on utilisera le théorème de factorisation $(2^n - 1)$ fois.

Nous constatons que l'application du théorème de factorisation engendre souvent une complexité exponentielle, dans ce cas de figure, il est important pour l'accélération des calculs de procéder à des réductions sur la taille du graphe. Ces réductions sont comme suit :

2.1.2. Réductions et factorisation

Le principe de la réduction d'un graphe de fiabilité avant l'application du théorème de factorisation est de diminuer autant que possible le nombre des nœuds et des arêtes à condition que la valeur de la fiabilité reste invariable. Cela, conduit à générer un nouveau graphe G' équivalent en termes de fiabilité au graphe initial G . Donc, il s'agit de remplacer une structure topologique complexe par une autre plus simple qui préserve les mêmes propriétés de fiabilité. C'est-à-dire que si Ω est une constante de transformation propre à chaque formule de transformation. Dans le cas général nous définissons alors la relation suivante :

$$R(G) = \Omega R(G') \quad (7)$$

Notons que le processus de réduction est d'une complexité polynomiale contrairement à la décomposition qui est exponentielle. Ce processus doit procéder dans un premier temps, par une succession de réductions simples appliquées à des graphes dits série-parallèles. Elles se définissent comme suit :

2.1.2.1 Réductions séries-parallèles

Le processus de réduction tient compte précisément des données relatives aux fiabilités et celle des K-nœuds du graphe, alors le remplacement parallèle et le remplacement série ne

font que modifier la structure topologique du graphe d'une forme complexe vers une forme simple à partir de laquelle, la fiabilité du graphe est déduite avec moins d'effort de calcul.

Les réductions simples les plus fréquentes se résument comme suit :

Réduction série. Soient $e_a = (u, v)$ et $e_b = (v, w)$ deux arêtes en série définies dans G_K et, tel que le $\text{degré}(v) = 2$ et $v \notin K$. Une réduction série obtient G' par le remplacement de e_a et e_b par une seule arête $e_c = (u, w)$ de fiabilité $p_c = p_a p_b$, et qui définit $\Omega = 1$ et $K' = K$, et où $R(G) = \Omega R(G')$.

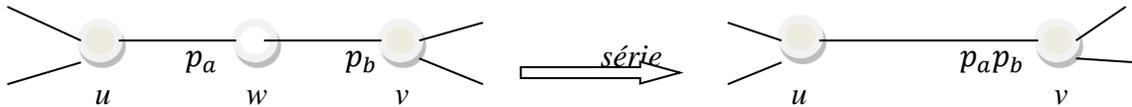


Figure 3. Réduction série

Réduction parallèle. Soient $e_a = (u, v)$ et $e_b = (u, w)$ deux arêtes parallèles dans G_K et supposons que $p_i = 1 - q_i$ ($i = a$ or b), la fiabilité associée à l'arête i . Une réduction parallèle permet de remplacer e_a et e_b par une seule et unique arête $e_c = (u, v)$ de fiabilité $p_c = 1 - q_a q_b$, et qui définit $\Omega = 1$ et $K' = K$ et où $R(G) = \Omega R(G')$.

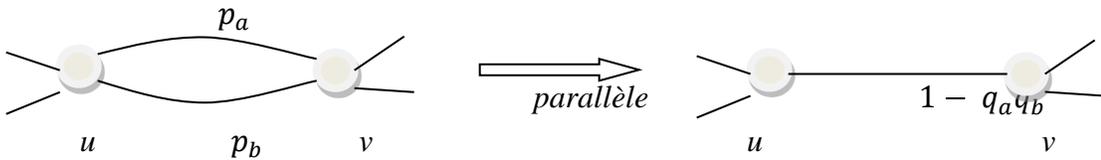


Figure 4. Réduction parallèle

Réduction de Degré-deux. Soient $e_a = (u, v)$ et $e_b = (v, w)$ deux arêtes en série dans G_K , telles que $v \neq w$, $\text{degré}(v) = 2$ et u, v et $w \in K$. Une réduction de degré-deux crée G' par le remplacement de e_a et e_b par une seule et unique arête $e_c = (u, v)$ de fiabilité $p_c = \frac{p_a p_b}{(1 - q_a q_b)}$, avec $K' = K - v$, et $\Omega = 1 - q_a q_b$.

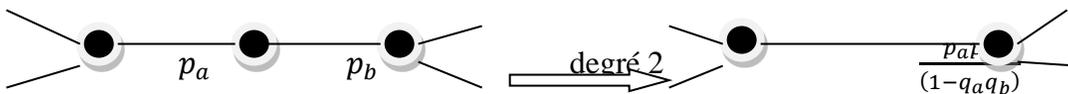


Figure 5. Réduction de degré deux

Réduction delta-à étoile. La réduction delta-à étoile consiste à remplacer une structure topologique delta par une structure étoile. Les sommets de la structure delta doivent être tous de même type : tous des K-nœuds ou tous des non-K-nœuds. Le sommet ainsi rajouté pour le besoin de la transformation vers la structure étoile n'appartient pas à K et sa probabilité est calculée comme suit (figure 6):

$$p_x = \frac{\alpha}{\alpha + \beta_1}, \quad p_y = \frac{\alpha}{\alpha + \beta_2}, \quad p_z = \frac{\alpha}{\alpha + \beta_3}$$

et

$$p_{u_0} = \frac{(\alpha + \beta_1)(\alpha + \beta_2)(\alpha + \beta_3)}{\alpha^2} \quad (8)$$

Avec

$$\alpha = p_a p_b + p_a p_c + p_b p_c - 2p_a p_b p_c, \quad \beta_1 = q_a q_b p_c, \quad \beta_2 = q_a p_b p_c, \quad \beta_3 = p_a q_b q_c$$

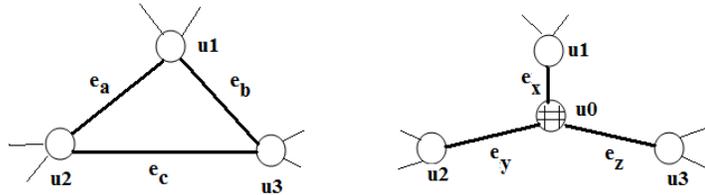


Figure 6. Réduction delta-à étoile

Réductions polygone-à chaîne. Dans un graphe G , une chaîne est une séquence alternée entre les nœuds et les arêtes du graphe. Sa longueur est le nombre d'arêtes qui la compose et elle est au moins égale à 1. Aussi, les sommets internes sont tous de degré 2, et les sommets aux extrêmes sont de degré supérieur à 2. Si le graphe admet au moins deux chaînes χ_1 et χ_2 de longueur respectivement l_1 et l_2 , et si ces deux chaînes ont en commun deux nœuds en terminaux u et v , alors $\Delta = \chi_1 \cup \chi_2$ est un polygone de longueur $l_1 + l_2$. Autrement dit, le polygone forme un cycle dont deux sommets sont de degré supérieur à 2. Il est aussi vrai que deux chaînes parallèles délimitées entre deux nœuds peuvent être substituées et donc remplacées par une nouvelle chaîne. Cette opération est dite réduction *polygone-à chaîne*. Ce qui suggère qu'une transformation polygone-à chaîne, consiste à remplacer un polygone par une chaîne. Aussi, comme les polygones se diversifient par la forme de leur structure, c'est-à-dire le nombre d'arêtes les composant, Satyanarayana et Wood (1985), ont énuméré 7 types de polygones pouvant être remplacés par une chaîne.

C'est ainsi, que par une série de transformations polygone-à chaîne qui peuvent être entrecoupées par des réductions série, parallèle, delta-étoile et étoile-delta que tout réseau qui admet des sous-structures de type polygone, dans le meilleur des cas, peut être transformé en une structure très simple (par exemple une chaîne) et par la même, sa fiabilité est réduite par application des formules ainsi obtenues.

Notons que la table 1 (page 823) publiée par Satyanarayana *et* Wood (1985) et reprise dans Wood (1986) présente les réductions polygone-à chaîne pour les réseaux parfaits. Néanmoins, les auteurs ont présenté les rudiments du calcul basé sur le théorème 1, donné à la page 823 et sa démonstration. Ce théorème fournit un cadre général sur lequel nous pouvons déduire les transformations polygones-à chaîne des 7 figures. Il est utile de constater que le processus de transformation n'est pas aussi aisé que les auteurs le pensent sans la reproduction de toutes les étapes de transformation. Ce travail va être fait par nous dans le cadre de cet article. Il constitue un apport très important pour montrer que sans passer par les détails de l'application du théorème de factorisation, l'on serait incapable de trouver toutes les formules de transformation énoncées dans la table 1 de Satyanarayana *et* Wood (1985). Notons aussi que les travaux de Satyanarayana *et* Wood prennent en charge uniquement les réseaux non-orientés dont seules les arêtes sont susceptibles de représenter les défaillances et le bon fonctionnement. La réalité est toute autre, car les systèmes actuels sont plus complexes et donc les nœuds peuvent aussi subir des défaillances. Plusieurs travaux ont été réalisés dans ce sens et des algorithmes énoncés. Parmi ceux-là, Théologou *et* Carlier dans (1991) ont présenté un algorithme qui prend en charge cette problématique. Nous y reviendrons un peu plus tard sur ce cas en proposant un schéma de démonstration qui ne se trouve dans aucun travail (à notre connaissance) fait en dehors des travaux de Simard (1996) et Rebaiaia *et al.* (2009),

Dans ce qui suit, nous présentons une dynamique de transformation qui détaille contrairement à Satyanarayana *et* Wood toutes les opérations de réduction. Pour cela, nous commencerons par le cas polygone-à chaîne de type 1 et nous énoncerons le théorème 1. Nous ferons aussi le parallèle en considérant le cas de polygone-à chaîne lorsque le réseau est imparfait. Pour cela nous énoncerons le théorème 2 pour le cas de la transformation de polygone-à chaîne de type 6.

3. Factorisation polygone-à chaîne- Cas des liens imparfaits et nœuds parfaits

3.1. Réduction polygone-à chaîne de type 1

Pour démontrer les résultats d'une telle transformation, considérons le cas d'une réduction polygone-à chaîne de type 1 (il est conseillé de voir Satyanarayana *et* Wood (1985) ou Rebaiaia *et al.*, (2009). Dans ce cas, le graphe G' qui est l'équivalent du graphe G , est obtenu en remplaçant le polygone de type 1 (triangle) par la chaîne qui possède deux arcs e'_1 et e'_2 avec les fiabilités respectives p'_1 et p'_2 (voir figure 7). La relation générale qui relie la fiabilité du graphe G et G' est donnée par $R(G) = \Omega R(G')$. Le problème dans ce cas est de déterminer le triplet (Ω, p'_1, p'_2) .

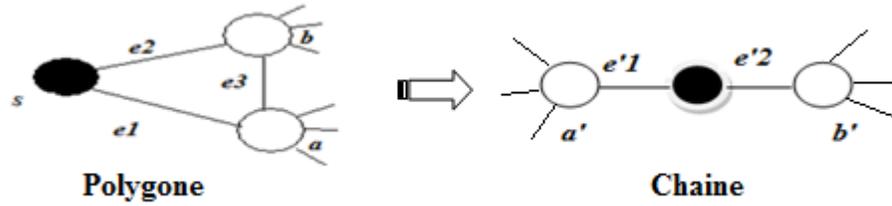


Figure 7. Réduction polygone-chaîne de type 1

Pour le faire, nous énonçons le théorème suivant :

Théorème 1.

Supposons qu'un graphe G contienne un polygone de type-1 tel que présenté dans la figure 7 (Gauche). Soit G' le graphe obtenu par transformation du graphe G par remplacement des arêtes e_1 et e_2 de probabilités p_1 et p_2 par les arêtes e'_1 et e'_2 de probabilité p'_1 et p'_2 et soit Ω un facteur de multiplication. Alors

$$R(G) = \Omega R(G')$$

Où

$$\Omega = (\delta + A)(\delta + B)/\delta,$$

avec

$$A = q_1 p_2 q_3, B = p_1 q_2 q_3, \delta = p_1 p_2 p_3 [1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{p_2} + \frac{q_3}{p_3}],$$

$$\text{et } p'_1 = \delta/(\delta + A) \text{ et } p'_2 = \delta/(\delta + B).$$

(9)

Preuve :

La première étape consiste à appliquer successivement la procédure de factorisation sur les arcs pivots e_1 , e_2 et e_3 . Nous procédons comme suit :

Pivotons tout d'abord sur l'arc e_1 (voir la figure 8) tout en appliquant l'équation (4), la fiabilité du graphe devient :

$$R(G) = p_1 R(G * e_1) + q_1 R(G - e_1) \quad (10)$$

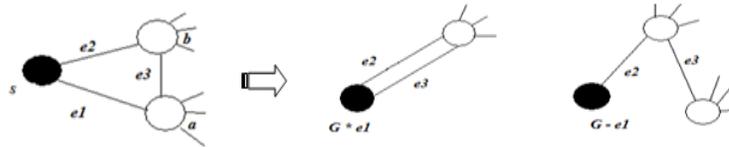


Figure 8. Première étape du processus de factorisation

Puis, décomposons sur l'arc e_2 , nous obtenons la relation (10), on obtient (11):

$$R(G) = p_1 [p_2 R((G * e_1) * e_2) + q_2 R((G * e_1) - e_2)] + q_1 [p_2 R((G - e_1) * e_2) + q_2 R((G - e_1) - e_2)] \quad (11)$$

Nous pouvons remarquer que la fiabilité du graphe $((G - e_1) - e_2)$ est nulle. En effet, en retirant les arcs e_1 et e_2 de G , le K-nœud se trouve complètement isolé, par conséquent cette opération génère une fiabilité nulle. La relation (11) précédente devient alors :

$$R(G) = p_1 p_2 R((G * e_1) * e_2) + p_1 q_2 R((G * e_1) - e_2) + p_2 q_1 R((G - e_1) * e_2) \quad (12)$$

Appliquons de nouveau le théorème de factorisation aux graphes réduits $(G * e_1) - e_2$ et $(G - e_1) * e_2$ en considérant l'arc e_3 . La relation (12) est transformée en (13), qui est :

$$\begin{aligned} R(G) &= p_1 p_2 R((G * e_1) * e_2) + p_1 q_2 [p_3 R((G * e_1) - e_2) * e_3] + q_3 R(((G * e_1) - e_2) - e_3) \\ &\quad + p_2 q_1 [p_3 R((G - e_1) * e_2) * e_3] + q_3 [R((G - e_1) * e_2) - e_3] \\ &= p_1 p_2 R((G * e_1) * e_2) + p_1 q_2 p_3 R((G * e_1) - e_2) * e_3 + q_3 p_1 (1 - p_2) R(((G * e_1) \\ &\quad - e_2) - e_3) + p_2 q_1 p_3 R(((G - e_1) * e_2) * e_3) \\ &\quad + p_2 q_1 (1 - p_3) R(((G - e_1) * e_2) - e_3) \end{aligned} \quad (13)$$

Notons que nous n'avons pas pu éliminer l'arc e_3 par décomposition du graphe $(G * e_1) * e_2$, puisque cet arc ne fait plus partie du graphe correspondant à la contraction des arcs e_1 et e_2 .

L'équation précédente (13) est l'expression de la fiabilité du graphe G en fonction des graphes réduits n'ayant plus les arcs du polygone. Comme les graphes correspondant à $(G * e_1) * e_2$, $((G - e_1) * e_2) * e_3$ et $(G * e_1) - e_2) * e_3$ sont identiques, il en résulte que les fiabilité de ces graphes sont aussi identiques. Ce qui se traduit par la relation (14) qui est générée de l'expression (13).

$$R(G) = [p_1p_2 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3]R((G * e_1) * e_2) + p_1q_2q_3R(((G * e_1) - e_2) - e_3) + q_1p_2q_3R(((G - e_1) * e_2) - e_3) \quad (14)$$

Par une démarche identique, on peut exprimer maintenant la fiabilité du graphe G' en pivotant successivement sur les arcs e'_1 et e'_2 et donc la fiabilité du graphe G' s'écrit :

$$R(G') = p'_1 [p'_2 R((G' * e'_1) * e'_2) + (1 - p'_2) R((G' * e'_1) - e'_2)] + (1 - p'_1) [p_2 R((G - e_1) * e_2)] \quad (15)$$

Il est nécessaire dans le cas actuel d'exprimer la relation permettant de relier la fiabilité de G' à celle de G . Nous pouvons remarquer qu'il existe une similitude entre les équations ainsi formulées et il en découle que:

$$\begin{aligned} R((G * e_1) * e_2) &= R((G' * e'_1) * e'_2) \\ R((G * e_1) - e_2) - e_3 &= R((G' * e'_1) - e'_2) \\ R((G - e_1) * e_2) - e_3 &= R((G' - e'_1) * e'_2) \end{aligned} \quad (16)$$

Comme la formule générale de réduction est donnée par $R(G) = \Omega R(G')$, on obtient un système de trois équations à trois inconnues (Ω , p'_1 , p'_2) et qui est :

$$\begin{cases} p_1p_2 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3 = \Omega p'_1p'_2 \\ q_1p_2q_3 = \Omega q'_1p'_2 \\ p_1q_2q_3 = \Omega p'_1q'_2 \end{cases} \quad (17)$$

En résolvant ce système on obtient une formule de réduction qui permet de remplacer un polygone de type 1 par une chaîne de longueur deux. Les fiabilités relatives aux arcs de la chaîne sont :

$$\begin{cases} p'_1 = \delta/(\delta + A) \\ p'_2 = \delta/(\delta + B) \\ \Omega = (\delta + A)(\delta + B)/\delta \end{cases} \quad (18)$$

De même

$$\begin{cases} A = q_1 p_2 q_3 \\ B = p_1 q_2 q_3 \\ \delta = p_1 p_2 p_3 \left[1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{p_2} + \frac{q_3}{p_3} \right] \end{cases} \quad (19)$$

Finalement, nous notons qu'il est possible de dériver une topologie simplifiée à partir d'une autre plus complexe tout en préservant l'expression de la fiabilité en tant que telle, et ceci après l'application d'une série de réductions. Le problème qui risque de surgir étant, l'automatisation de la reconnaissance d'une certaine topologie dont les calculs se déduisent très facilement. L'idée est très bénéfique à condition de concevoir des algorithmes puissants qui permettent de sauter facilement une telle phase critique du processus d'identification et de calcul, ou du moins de déterminer les moyens nécessaires de chercher les équivalences entre structures.

3.2. Réduction polygone-à chaîne de type 6

Nous pouvons à présent énoncer le théorème de Satyanarayana *et* Wood (1985) qui généralise le calcul uniquement pour le cas des réseaux imparfaits.

Théorème 2.

Supposons que G_K contienne un polygône de type J ($1 \leq J \leq 7$). Soit, $G'_{K'}$, le graphe obtenu après le remplacement du polygône Δ_j de G_K de chaîne χ_j , et soit Ω_j le facteur de multiplication, alors, $R(G_K) = \Omega_j R(G'_{K'})$.

La démonstration du théorème se trouve dans Satyanarayana *et* Wood (1985) aux pages 824-825.

A partir du théorème 2 et en procédant de la même manière que pour le cas de réduction-à chaîne de type 1 lorsque seuls les liens sont sujets à des défaillances, nous énonçons le théorème suivant :

Théorème 3.

Supposons qu'un graphe G contienne un polygone de type-6 tel que présenté dans la figure 9 (a). Soit G' le graphe obtenu par transformation du graphe G par remplacement des arêtes e_1, e_2, e_3, e_4 et e_5 de probabilités p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5 par les arêtes, e_r, e_s et e_t de fiabilité p_r, p_s et p_t et soit Ω un facteur de multiplication. Alors

$$R(G) = \Omega R(G')$$

$$\Omega = \frac{(A+D)(B+D)(C+D)}{D^2}$$

$$p_r = \frac{D}{(\alpha+D)}$$

$$p_s = \frac{D}{(\beta+D)}$$

$$p_t = \frac{D}{(\delta+D)}$$
(20)

$$A = \Omega q_r p_s p_t; B = \Omega p_r q_s p_t; C = \Omega p_r p_s q_t; D = \Omega p_r p_s p_t$$

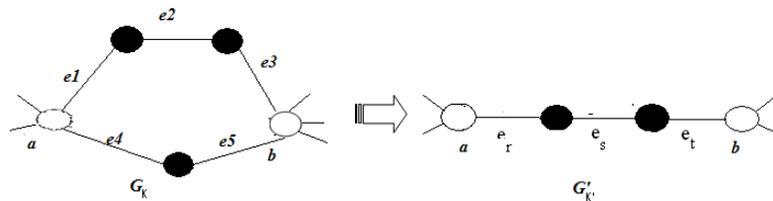


Figure 9. Factorisation polygone-à chaîne de type-6

Preuve :

Adoptons une démarche différente que pour le cas polygone-à chaîne de type 1. Au lieu de rappeler tous les graphes induits suite aux décompositions ainsi que l'expression de leurs fiabilités, nous résumerons le processus de factorisation en fournissant les graphes non-défaillants (les autres provoquant la nullité de la fiabilité sont écartés), les événements et la

valeur des fiabilités relatives. La table 2, résume les résultats de la décomposition polygone-à chaîne de type 6. Il est simple de constater que le nombre de combinaisons des événements qui forment l'état du système est égal à 2^5 . Cependant, nous constatons que chaque état non-défaillant induira un nouveau graphe constitué du nombre correspondant de K-nœuds. Il y en aura dans ce cas 4 graphes comme dans la figure 10 avec les états et les probabilités dans chaque cas.

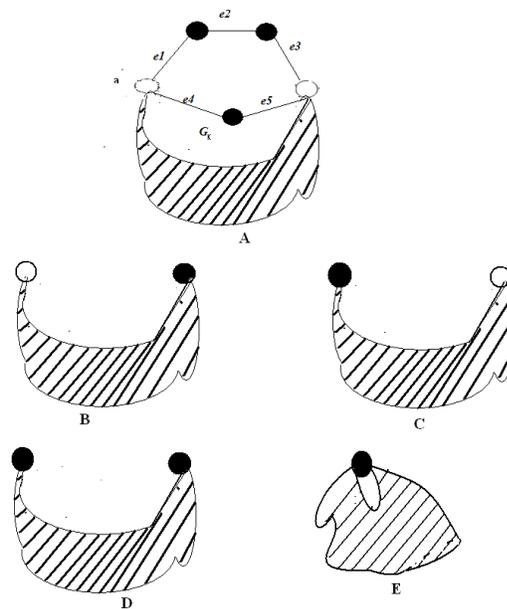


Figure 10. Graphe G renfermant un polygone de type-6 (A) et ces 4 sous-graphes induits non-défaillants (B, C, D et E)

A partir des graphes de la figure 10, nous déterminons les états et les probabilités correspondant à chaque graphe induit. Nous supposons toujours que F_i et \overline{F}_i dénotent respectivement que l'événement e_i (le composant) soit qu'il fonctionne, soit qu'il est défaillant et chaque p_i (resp. $q_i = 1 - p_i$) étant la probabilité de non-défaillance (resp. défaillance). Toutes les formules sont reportées dans la table suivante :

Table 2. États de non-défaillants et les probabilités des graphes ainsi déduits.

Graphe	États	Probabilités
B	$\overline{F_1}F_2\overline{F_3}\overline{F_4}F_5$	$\alpha = q_1p_2p_3q_4p_5$
C	$F_1F_2\overline{F_3}F_4\overline{F_5}$	$\delta = p_1p_2q_3p_4q_5$
D	$F_1\overline{F_2}F_3\overline{F_4}F_5; F_1\overline{F_2}F_3F_4\overline{F_5};$ $F_1F_2\overline{F_3}\overline{F_4}F_5; \overline{F_1}F_2F_3F_4\overline{F_5}$	$\beta = p_1q_2p_3q_4p_5 + p_1q_2p_3p_4q_5 + p_1p_2q_3q_4p_5 + q_1p_2p_3p_4q_5$ $= p_1q_2p_3(q_4p_5 + p_4q_5) + p_2(q_1p_3p_4q_5 + p_1q_3q_4p_5)$
E	$F_1F_2F_3F_4F_5; \overline{F_1}F_2F_3F_4F_5;$ $F_1\overline{F_2}F_3F_4F_5; F_1F_2\overline{F_3}F_4F_5;$ $F_1F_2F_3\overline{F_4}F_5; \overline{F_1}F_2F_3F_4\overline{F_5}$	$\gamma = p_1p_2p_3p_4p_5 + q_1p_2p_3p_4p_5 + p_1q_2p_3p_4p_5 +$ $p_1p_2q_3p_4p_5 + p_1p_2p_3q_4p_5 + p_1p_2p_3p_4q_5$ $= p_1p_2p_3p_4p_5(1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{p_2} + \frac{q_3}{p_3} + \frac{q_4}{p_4} + \frac{q_5}{p_5})$

Finalemnt, en regroupant les expressions similaires et en supprimant d'autres qui induisent la nullité, l'expression de fiabilité du polygone de type 6 ainsi réduite est comme suit :

$$R(G_K) = \alpha.R(G_{B,K_B}) + \beta.R(G_{C,K_C}) + \delta.R(G_{D,K_D}) + \gamma.R(G_{E,K_E}) \quad (21)$$

Le pivotage successif sur les liens e_1, e_2, e_3, e_4 et e_5 , transforme le graphe G_K en une chaîne $G'_{K'}$, (voir figure 9). Cependant lorsqu'on utilise le théorème de factorisation sur $G'_{K'}$, pour déterminer les formules d'équivalences des termes, nous identifions sur $G'_{K'}$, quatre graphes non-défaillants, les états ainsi que les probabilités correspondants. En supposant toujours que F_r, F_s and F_t sont les événements relatifs aux liens r, s et t (figure 9. (b)), les résultats sont résumés dans la table 3.

Table 3. États non-défaillants et les probabilités des graphes induits $G'_{K'}$.

Graphe	States	Probabilités
B'	$\overline{F_r}F_sF_t$	$\alpha' = q_r p_s p_t$
C'	$F_r F_s \overline{F_t}$	$\beta' = p_r p_s q_t$
D'	$F_r \overline{F_s} F_t$	$\delta' = p_r q_s p_t$
E'	$F_r F_s F_t$	$\gamma' = p_r p_s p_t$

En regroupant les termes équivalents, la fiabilité du graphe ainsi réduit est :

$$\begin{aligned} R(G'_{K'}) &= \alpha' . R(G'_{B',K'_B'}) + \beta' . R(G'_{C',K'_C'}) + \delta' . R(G'_{D',K'_D'}) + \gamma' . R(G'_{E',K'_E'}) \\ &= q_r p_s p_t . R(G'_{B',K'_B'}) + p_r p_s q_t . R(G'_{C',K'_C'}) + p_r q_s p_t . R(G'_{D',K'_D'}) + p_r p_s p_t . R(G'_{E',K'_E'}) \end{aligned} \quad (22)$$

Utilisons présentement la relation $R(G_K) = \Omega R(G'_{K'})$, nous pouvons alors identifier les coefficients α, β, δ et γ comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha . R(G_{B,K_B}) + \beta . R(G_{C,K_C}) + \delta . R(G_{D,K_D}) + \gamma . R(G_{E,K_E}) &= \Omega . [q_r p_s p_t . R(G'_{B',K'_B'}) \\ &+ p_r p_s q_t . R(G'_{C',K'_C'}) + p_r q_s p_t . R(G'_{D',K'_D'}) + p_r p_s p_t . R(G'_{E',K'_E'})] \end{aligned} \quad (23)$$

Égalisons les termes des deux côtés de l'équation $R(G_K) = \Omega R(G'_{K'})$, il s'ensuit l'expression des égalités suivantes :

$$\alpha = \Omega q_r p_s p_t ; \quad \beta = \Omega p_r q_s p_t ; \quad \delta = \Omega p_r p_s q_t ; \quad \gamma = \Omega p_r p_s p_t \quad (24)$$

Finalement après résolution du système d'équations (23) sous (24) nous obtenons (25) :

$$p_r = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} ; \quad p_s = \frac{\gamma}{\beta + \gamma} ; \quad p_t = \frac{\gamma}{\delta + \gamma} ; \quad \Omega = \frac{(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma)(\delta + \gamma)}{\gamma^2} \quad (25)$$

et tel que les expressions réelles de α, β, δ et γ sont tirées de la table 2 (troisième colonne).

4. Factorisation polygone-à chaîne- Cas des liens et nœuds imparfaits

4.1. Principes de la décomposition en présence de nœuds imparfaits

Les hypothèses suivantes ont été retenues :

- Les arêtes et les nœuds sont sujets à des défaillances
- Les défaillances sont s-indépendantes avec des probabilités connues
- Tous les K-nœuds du graphe sont parfaitement fiables.

Notons que dans le cas des réseaux imparfaits, certaines modifications doivent être apportées au sens même de la factorisation compte-tenu du principe d'indépendance qui doit impérativement être respecté. Cependant les réductions suivantes doivent prévaloir :

Réduction série. Soient $e_a = (u, v)$ et $e_b = (v, w)$ deux arêtes en série définies dans G_K et, tel que le *degré*(v) = 2 et $v \notin K$. Une réduction série obtient G' par un remplacement de e_a et e_b par une seule arête $e_c = (u, w)$ de fiabilité $p_c = p_a p_b p_v$.

Réduction parallèle. La réduction parallèle reste inchangée.

Réduction de Degré-un. Quand un sommet imparfait v est adjoint à un K-nœud de *degré 1* suivi du lien e_a on a : $\Omega = p_a p_v$.

Réduction de Degré-deux. La réduction deux ne concerne que les K-nœuds.

Réduction polygone-à chaine. La réduction polygone-à chaine considère en général que le polygone soit indépendant du graphe par le fait qu'il soit relié au reste du graphe que par ses K-nœuds. Autrement dit, s'il se trouve qu'il soit lié par des nœuds autres que les cas K-nœuds et comme ces nœuds sont imparfaits une solution est alors à envisager. Theologou *et* Carlier (1991) ont proposé la construction suivante :

Considérons un lien $e = (u, v)$, où u et v sont des nœuds imparfaits de probabilités respectives p_u et p_v . Nous constatons que le lien l fonctionne avec une probabilité p_l lorsque e , u and v fonctionnent avec une probabilité p_i ($i = e, u, v$) et est telle que :

$$p_i = p_e p_u p_v \quad (26)$$

Le fait de pivoter sur le lien l en appliquant le théorème de factorisation, entrainera d'un côté la contraction de l'arrête e et le fusionnement des nœuds u et v pour former un nouveau nœud parfait. Par contre si le lien l arrête de fonctionner, la cause de cet arrêt ne peut être connue a priori du fait qu'il se pourrait que ce soit l'arrête ou les deux nœuds en même temps qui soient défaillants. De toute façon et dans tous les cas, ce lien sera perdu et donc supprimé.

Après cette opération de pivotage, les fiabilités de u et de v auront de nouvelles valeurs et leurs expressions sont comme suit :

$$p'_v = \Pr(v \text{ fonctionne} \mid v \text{ ou } e \text{ ou } u \text{ en pannes}) = \frac{p_v(q_u + p_u q_e)}{q_v + p_v q_u + p_v p_u q_e} \quad (27)$$

$$p'_u = \Pr(u \text{ fonctionne} \mid u \text{ ou } e \text{ ou } v \text{ en pannes}) = \frac{p_u(q_v + p_v q_e)}{q_u + p_u q_v + p_u p_v q_e} \quad (28)$$

Nous pouvons remarquer que ces deux dernières équations montrent clairement que u et v sont intimement liés. Pour éviter une telle situation compte-tenu des conditions de départ, Theologou *et* Carlier ont proposé une nouvelle construction de u et de v . L'idée est comme suit :

Supposons que les K -nœuds sont tous connectés et parfaits, autrement dit si ce n'est pas le cas la fiabilité du réseau original s'écrit : où G'_k et G_k sont construits avec des K -nœuds parfaits. Et donc, l'équation suivante s'impose.

$$R(G_K) = \prod_{v \in K} p_v R(G'_K) \quad (29)$$

Il existe alors au moins deux K -nœuds dans le graphe et qu'il est toujours possible de trouver une arête dans le graphe avec une extrémité parfaite. Soit e une telle arête d'extrémités u parfait et v imparfait. Le fait de remplacer dans (27) $p_u = 1$ et comme $p_v \neq 1$, on obtient :

$$p'_v = \frac{p_v q_e}{q_v + p_v q_e} \quad (30)$$

Nous remarquons que dans l'état actuel, la défaillance de v ne dépend que de l'arrête e et donc, u et v sont rendus indépendants et par conséquent avec une telle construction tous les nœuds sont forcés d'être indépendants.

Comme le nœud v reste dans le graphe où le lien l soit défaillant, alors les autres liens qui ont pour l'une de leurs extrémités v peuvent être factorisés et que la défaillance de v dépendra alors de la défaillance de ces arêtes. Par conséquent, il s'agit de construire la formulation générale qui permet de représenter la fiabilité relative au nœud imparfait v à une étape quelconque de la factorisation lorsque les arêtes (e_1, e_2, \dots, e_r) incidentes à v sont factorisées. Cette fiabilité est donnée par (31) après l'application du théorème de factorisation:

$$\begin{aligned}
 p_v'' &= \Pr(v \text{ fonctionne} \mid (v \text{ ou } e_1 \text{ en panne}) \wedge \dots \wedge (v \text{ ou } e_r \text{ en panne})) \\
 &= \frac{p_v \prod_{j=1}^r q_{e_j}}{q_v + p_v \prod_{j=1}^r q_{e_j}}
 \end{aligned} \tag{31}$$

4.2. Réduction polygone-à chaîne de type 1

Nous énonçons à présent le théorème 4 qui permet d'avancer les résultats de la réduction polygone-à chaîne de type 1 dans le cadre des graphes qui admettent une la structure d'un polygone de type 1.

Théorème 4.

Supposons qu'un graphe G contienne un polygone de type 1 et soit G' le graphe obtenu par transformation du graphe G par le remplacement des arêtes e_1 et e_2 de probabilités originales p_1 et p_2 par e'_1 et e'_2 de probabilités p'_1 et p'_2 et les nœuds a et b de probabilités originales p_a et p_b par les probabilités p'_a et p'_b (figure 7, ci-dessus) et soit Ω un facteur de multiplication. Alors :

$$R(G) = \Omega R(G')$$

Avec

$$\Omega = (\delta + A)(\delta + B)/\delta, \quad p'_1 = \delta/(\delta + AC) \quad , \quad p'_2 = \delta/(\delta + BD), \quad p'_a = (\delta + AC)/(\delta + A), \quad p'_b = (\delta + BD)/(\delta + B)$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \delta = p_a p_b [p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 - 2p_1 p_2 p_3] \\
 A = p_2 p_b [1 - p_1 p_a - p_3 p_a + p_1 p_3 p_a] \\
 B = p_1 p_a [1 - p_2 p_b - p_3 p_b + p_2 p_3 p_b] \\
 C = \frac{p_a q_1 q_3}{(q_a + p_a q_1 q_3)} \\
 D = \frac{p_b q_2 q_3}{(q_b + p_b q_2 q_3)}
 \end{array} \right. \tag{32}$$

Preuve :

En appliquant le théorème de factorisation sur le lien (s, e_1, a) , on obtient les graphes réduits $(G * e_1)$ et $(G - e_1)$ (voir figure 7). L'expression de la fiabilité de graphe G devient :

$$R(G) = p_1 p_a R(G * e_1) + (1 - p_1 p_a) R(G - e_1) \quad (33)$$

Par application des résultats introduits par Theologou and Carlier (1991), et comme le nœud a est un nœud imparfait, il devient lors de la décomposition un nœud pivot. Par conséquent la fiabilité du nœud a dans le graphe qui correspond à $(G - e_1)$, est modifiée et sera remplacée par la relation suivante :

$$p'_a = \frac{p_a q_1}{(q_a + p_a q_1)} \quad (34)$$

En décomposant sur le lien (s, e_2, b) , des graphes réduits $G * e_1$ et $G - e_1$. L'expression de la fiabilité de graphe G devient :

$$R(G) = p_1 p_a [p_2 p_b R((G * e_1) * e_2) + (1 - p_2 p_b) R((G * e_1) - e_2)] + (1 - p_1 p_a) [p_2 p_b R((G - e_1) * e_2)] \quad (35)$$

De la même manière que le nœud a , la fiabilité du nœud b dans le graphe correspondant à $(G * e_1) - e_2$ est modifiée et sera égale a :

$$p'_b = \frac{p_b q_2}{(q_b + p_b q_2)} \quad (36)$$

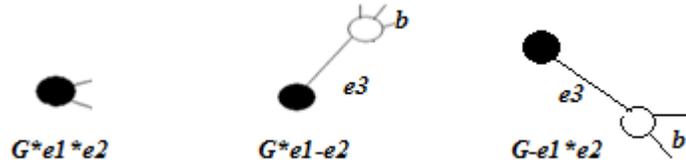


Figure 11. Graphes générés par la décomposition sur le lien (s, e_2, b) .

En décomposant maintenant sur le lien (s, e_3, b) du graphe réduit $(G * e_1) - e_2$ et sur le lien (s, e_3, a) du graphe réduit $(G - e_1) * e_2$ (voir figure 11), on obtient finalement :

$$R(G) = p_1 p_a \left[p_2 p_b R((G * e_1) * e_2) + (1 - p_2 p_b) \left[p_3 p'_b R(((G * e_1) - e_2) * e_3) + (1 - p_3 p'_b) R(((G * e_1) - e_2) - e_3) \right] \right] + (1 - p_1 p_a) \left[p_2 p_b \left[p_3 p'_a R(((G - e_1) * e_2) * e_3) + (1 - p_3 p'_a) R(((G - e_1) * e_2) - e_3) \right] \right] \quad (37)$$

Dans le graphe $((G - e_1) * e_2) - e_3$ la nouvelle fiabilité du nœud est donnée par :

$$p''_a = \frac{p_a q_1 q_3}{(q_a + p_a q_1 q_3)} \quad (38)$$

Avec le graphe $((G * e_1) - e_2) - e_3$, la nouvelle fiabilité du nœud b est donnée par :

$$p''_b = \frac{p_b q_2 q_3}{(q_b + p_b q_2 q_3)} \quad (39)$$

Comme on peut le remarquer, plusieurs états peuvent induire un graphe identique. On peut donc établir l'égalité suivante :

$$R((G * e_1) * e_2) = R(((G - e_1) * e_2) * e_3) = R(((G * e_1) - e_2) * e_3) \quad (40)$$

En groupant et en éliminant des termes, l'expression de la fiabilité du graphe devient :

$$\begin{aligned} R(G) = & p_a p_b [p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 - 2 p_1 p_2 p_3] R((G * e_1) * e_2) \\ & + p_1 p_a [1 - p_2 p_b - p_3 p_b + p_2 p_3 p_b] R(((G * e_1) - e_2) - e_3) \\ & + p_2 p_b [1 - p_1 p_a - p_3 p_a - p_1 p_3 p_a] R(((G - e_1) * e_2) - e_3) \end{aligned} \quad (41)$$

Procédons maintenant sur le graphe G' . L'application du théorème de factorisation sur le lien (s, e'_1, a) du graphe G' , conduit à :

$$R(G') = p'_1 p'_a R(G' * e'_1) + (1 - p'_1 p'_a) R(G' - e'_1) \quad (42)$$

La fiabilité du nœud a dans le graphe correspondant à $(G' - e'_1)$ a été modifiée selon la relation (30) :

$$(p'_a)' = \frac{p'_a q'_1}{(q'_a + p'_a q'_1)} \quad (43)$$

Finalement l'expression de la fiabilité du graphe G' est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} R(G') = & p'_1 p'_a [p'_2 p'_b R((G' * e'_1) * e'_2) + (1 - p'_2 p'_b) R((G' * e'_1) - e'_2)] \\ & + (1 - p'_1 p'_a) [p'_2 p'_b R((G' - e'_1) * e'_2)] \end{aligned} \quad (44)$$

Par contre la nouvelle expression de la fiabilité relative au nœud b devient :

$$(p'_b)' = \frac{p'_b q'_2}{(q'_b + p'_b q'_2)} \quad (44)$$

Comme les graphes G and G' sont identiques, nous obtenons :

$$R((G * e_1) * e_2) = R((G' * e'_1) * e'_2) \quad \text{et} \quad R(((G * e_1) - e_2) - e_3) = R(((G' * e'_1) - e'_2) - e'_3) \quad (45)$$

Cette dernière expression est valide si et seulement si :

$$\begin{aligned} p''_a &= (p'_a)' \\ \text{et l'égalité } R(((G - e_1) * e_2) - e_3) &= R(((G' - e'_1) * e'_2) - e'_3) \text{ est valide si et seulement si :} \\ p''_b &= (p'_b)' \end{aligned}$$

Finalement, suite à la relation d'équivalence $R(G) = \Omega R(G')$, et la dernière formule, nous déduisons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_a p_b [p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 - 2p_1 p_2 p_3] = \Omega [p'_1 p'_2 p'_a p'_b] \\ p_1 p_a [1 - p_2 p_b - p_1 p_3 + p_3 p_b + p_2 p_3 p_b] = \Omega [p'_1 p'_a (1 - p'_2 p'_b)] \\ p_2 p_b [1 - p_1 p_a - p_3 p_a + p_1 p_3 p_a] = \Omega [p'_1 p'_b (1 - p'_2 p'_a)] \\ \frac{p_a q_1 q_3}{(q_a + p_a q_1 q_3)} = \frac{p'_a q'_1}{(q'_a + p'_a q'_1)} \\ \frac{p_b q_2 q_3}{(q_b + p_b q_2 q_3)} = \frac{p'_b q'_2}{(q'_b + p'_b q'_2)} \end{array} \right. \quad (46)$$

La résolution du système (46) se résume comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = \frac{(\delta + A)(\delta + B)}{\delta} \\ p'_1 = \frac{\delta}{(\delta + A C)} \\ p'_2 = \frac{\delta}{(\delta + B D)} \\ p'_a = \frac{(\delta + A C)}{(\delta + A)} \\ p'_b = \frac{(\delta + B D)}{(\delta + B)} \end{array} \right. \quad (47)$$

avec δ , A, B, C et D tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = p_a p_b [p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 - 2p_1 p_2 p_3] \\ A = p_2 p_b [1 - p_1 p_a - p_3 p_a + p_1 p_3 p_a] \\ B = p_1 p_a [1 - p_2 p_b - p_3 p_b + p_2 p_3 p_b] \\ C = \frac{p_a q_1 q_3}{(q_a + p_a q_1 q_3)} \\ D = \frac{p_b q_2 q_3}{(q_b + p_b q_2 q_3)} \end{array} \right. \quad (48)$$

Nous venons de démontrer le théorème 4, passons maintenant au cas de la réduction polygone-à chaîne de type 7.

4.3. Réduction polygone-à chaîne de type 7

Théorème 5.

Supposons qu'un graphe G contienne un polygone de type 7 et soit G' le graphe obtenu par transformation du graphe G par le remplacement des arêtes e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 et e_6 de probabilités originales p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 par e'_1 et e'_2 de probabilités p'_1 et p'_2 et les nœuds a et b de probabilités originales p_a et p_b par les probabilités p'_a et p'_b (figure 11, ci-dessous) et soit Ω un facteur de multiplication. Alors $R(G) = \Omega R(G')$ et,

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \gamma = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_a p_b \left[1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{p_2} + \frac{q_3}{p_3} + \frac{q_4}{p_4} + \frac{q_5}{p_5} + \frac{q_6}{p_6} \right] \\
 B = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_a p_b \left[\frac{q_3 q_4}{p_3 p_4} + \frac{q_2 q_5}{p_2 p_5} + \frac{q_2 q_4}{p_2 p_4} + \frac{q_1 q_5}{p_1 p_5} + \frac{q_1 q_6}{p_1 p_6} + \frac{q_3 q_5}{p_3 p_5} + \frac{q_2 q_6}{p_2 p_6} \right] \\
 A = p_1 p_2 p_3 p_5 p_6 p_b [1 - p_1 p_a - p_4 p_a + p_1 p_4 p_a] \\
 \delta = p_1 p_2 p_4 p_5 p_a [1 - p_3 p_b - p_6 p_b + p_3 p_6 p_b] \\
 C = \frac{p_a q_1 q_4}{(q_a + p_a q_1 q_4)} \\
 D = \frac{p_b q_3 q_6}{(q_b + p_b q_3 q_6)}
 \end{array} \right. \quad (49)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \Omega = \frac{(\gamma + A)(\gamma + B)(\delta + \gamma)}{\gamma^2} \\
 p'_1 = \frac{\gamma}{(\gamma + AC)} \\
 p'_2 = \frac{\gamma}{(\gamma + B)} \\
 p'_3 = \frac{\gamma}{(\gamma + D\delta)} \\
 p'_a = \frac{(\gamma + AC)}{(\gamma + A)} \\
 p'_b = \frac{(\gamma + D\delta)}{(\gamma + \delta)}
 \end{array} \right. \quad (50)$$

Preuve : Considérons à présent un graphe contenant un polygone de type 7 comme montré à la figure 12(G) et dont les nœuds a et b peuvent être sujets à des défaillances avec des probabilités de bon fonctionnement respectives p_a et p_b .

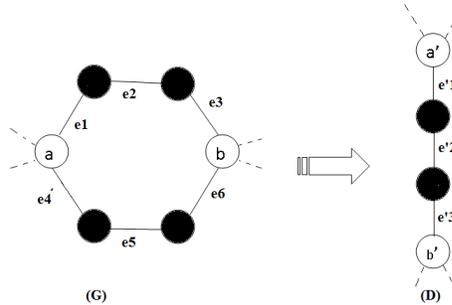


Figure 12. Réduction polygone-à chaîne de type 7

En pivotant successivement sur e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 et e_6 on obtient les graphes reportés dans la figure 13 et leurs expressions mathématiques dans la table 4 :

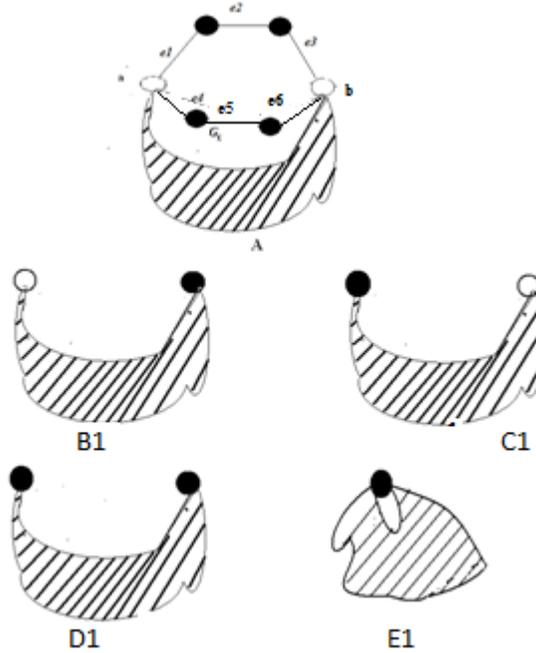


Figure 13. Graphes non-défaillants induits suite à la réduction polygone-à chaîne de type 7.

Table 4. États non-défaillants et leur expressions en probabilité ainsi déduites.

G_A	États	Probabilités
B1	$\overline{F_a} \overline{F_1} F_2 F_3 \overline{F_4} F_5 F_6$	$\alpha = p_2 p_3 p_5 p_6 p_b [(1 - p_1 p_a)(1 - p_4 p_a)]$ $= p_2 p_3 p_5 p_6 p_b [1 - p_1 p_a - p_4 p_a + p_1 p_4 p_a]$
C1	$F_1 F_2 \overline{F_b} \overline{F_3} F_4 F_5 \overline{F_b} \overline{F_6}$	$\delta = p_1 p_2 p_4 p_5 p_a [(1 - p_3 p_b)(1 - p_6 p_b)]$ $= p_1 p_2 p_4 p_5 p_a [1 - p_3 p_b - p_6 p_b + p_3 p_6 p_b]$
D1	$F_a F_1 \overline{F_2} \overline{F_3} \overline{F_4} F_5 F_6 F_b; F_a F_1 \overline{F_2} \overline{F_3} \overline{F_4} \overline{F_5} F_6 F_b;$ $F_a F_1 F_2 \overline{F_3} \overline{F_4} F_5 F_6 F_b; F_a F_1 F_2 \overline{F_3} \overline{F_4} \overline{F_5} F_6 F_b;$ $F_a F_1 \overline{F_2} \overline{F_3} F_4 F_5 \overline{F_6} F_b; F_a \overline{F_1} F_2 F_3 F_4 \overline{F_5} F_6 F_b;$ $F_a \overline{F_1} F_2 F_3 F_4 F_5 \overline{F_6} F_b$	$\beta = (p_1 q_2 p_3 q_4 p_5 p_6 + p_1 q_2 p_3 p_4 q_5 p_6 + p_1 p_2 q_3 q_4 p_5 p_6$ $+ p_1 p_2 q_3 p_4 q_5 p_6 + p_1 q_2 p_3 p_4 p_5 q_6 + q_1 p_2 p_3 p_4 q_5 p_6 +$ $q_1 p_2 p_3 p_4 p_5 q_6) p_a p_b$ $= p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_a p_b [\frac{q_2 q_4}{p_2 p_4} + \frac{q_2 q_5}{p_2 p_5} + \frac{q_3 q_4}{p_3 p_4} + \frac{q_3 q_5}{p_3 p_5} +$ $\frac{q_2 q_6}{p_2 p_6} + \frac{q_1 q_5}{p_1 p_5} + \frac{q_1 q_6}{p_1 p_6}]$
E1	$F_a F_1 F_2 F_3 F_4 F_5 F_6 F_b; \overline{F_a} \overline{F_1} F_2 F_3 F_4 F_5 F_6 F_b;$ $F_a F_1 \overline{F_2} \overline{F_3} F_4 F_5 F_6 F_b; F_a F_1 F_2 \overline{F_3} \overline{F_4} F_5 F_6 F_b;$ $F_a F_1 F_2 F_3 \overline{F_4} F_5 F_6 F_b; F_a F_1 F_2 F_3 F_4 \overline{F_5} F_6 F_b$	$\gamma = (p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 + q_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 + p_1 q_2 p_3 p_4 p_5 p_6 +$ $p_1 p_2 q_3 p_4 p_5 p_6 + p_1 p_2 p_3 q_4 p_5 p_6 + p_1 p_2 p_3 p_4 q_5 p_6 +$ $p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 q_6) p_a p_b$ $= p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_a p_b (1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{p_2} + \frac{q_3}{p_3} + \frac{q_4}{p_4} + \frac{q_5}{p_5} + \frac{q_6}{p_6})$

Comme la décomposition s'effectue sur e_1 et sur e_4 , sur le graphe réduit B1 et sur e_3 et e_6 sur le graphe réduit C1, il s'en vient que les nouvelles valeurs des fiabilités des nœuds a et b donnée par l'équation (38) et (39), sont :

$$\begin{aligned} p''_a &= \frac{p_a q_1 q_4}{q_a + p_a q_1 q_4} \\ p''_b &= \frac{p_b q_3 q_6}{q_b + p_b q_3 q_6} \end{aligned} \quad (51)$$

Reprenons l'application du théorème de factorisation sur le graphe réduit G' de G (polygone de type 7) et soient $e_1, e_2, et e_3$ les arêtes de G' de probabilités respectives $p_1, p_2, et p_3$. La table 5 nous donne les graphes induits suite à la décomposition de G' , les états ainsi que leur probabilités.

Table 5. États non-défaillants et les probabilités des graphes induits par le processus de factorisation du graphe G'_K .

Graphe	States	Probabilités
B'	$\overline{F_a F_1 F_2 F_3 F_b}$	$\alpha' = (1 - p_1 p_a) p_2 p_3 p_b$
C'	$F_a F_1 \overline{F_2 F_b F_3}$	$\beta' = (1 - p_3 p_b) p_1 p_2 p_a$
D'	$F_a F_1 \overline{F_2 F_3 F_b}$	$\delta' = p_1 q_2 p_3 p_a p_b$
E'	$F_a F_1 F_2 F_3 F_b$	$\gamma' = p_1 p_2 p_3 p_a p_b$

Les graphes suivants (figure 14), schématisent les formules des états et les probabilités correspondantes de la table 5. Notez que pour le graphe B' et C' respectivement, les probabilités conditionnelles sur le nœud a et l'arête e'_1 (graphe B') et l'arête e'_3 et le nœud b (graphe B') conduisent aux relations sur les nouvelles valeurs des fiabilités sur les nœuds a et b .

$$\begin{aligned} p''_a &= (p'_a)' = \frac{p'_a q'_1}{q'_a + p'_a q'_1} \\ p''_b &= (p'_b)' = \frac{p'_b q'_3}{q'_b + p'_b q'_3} \end{aligned} \quad (52)$$

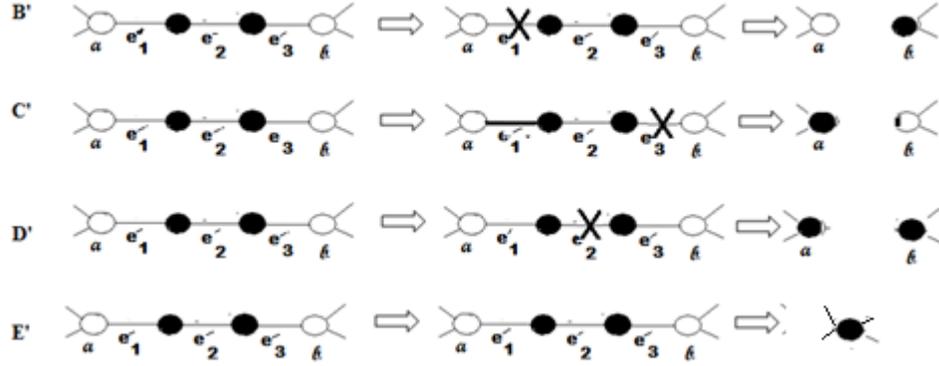


Figure 14. Transformation du graphe réduit G' par application de la factorisation

Utilisons présentement la relation $R(G_K) = \Omega R(G'_{K'})$, nous pouvons alors identifier les coefficients α, β, δ et γ comme suit :

$$\begin{aligned}
 A.R(G_{B,K_B}) + B.R(G_{C,K_C}) + \delta.R(G_{D,K_D}) + \gamma.R(G_{E,K_E}) &= \Omega[(1 - p'_1 p'_a) p'_2 p'_3 p'_b R(G'_{B',K'_B}) \\
 + (1 - p'_3 p'_b) p'_1 p'_2 p'_a R(G'_{C',K'_C}) + p'_1 q'_2 p'_3 p'_a p'_b R(G'_{D',K'_D}) + p'_1 p'_2 p'_3 p'_a p'_b R(G'_{E',K'_E})] & \quad (53) \\
 \frac{p_a q_1 q_4}{q_a + p_a q_1 q_4} &= \frac{p'_a q'_1}{q'_a + p'_a q'_1} \\
 \frac{p_b q_3 q_6}{q_b + p_b q_3 q_6} &= \frac{p'_b q'_3}{q'_b + p'_b q'_3}
 \end{aligned}$$

Égalisons les termes des deux côtés de l'équation $R(G_K) = \Omega R(G'_{K'})$, il s'ensuit l'expression des égalités suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned}
 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_a p_b [1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{p_2} + \frac{q_3}{p_3} + \frac{q_4}{p_4} + \frac{q_5}{p_5} + \frac{q_6}{p_6}] &= \Omega [p'_1 p'_2 p'_3 p'_a p'_b] \\
 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_a p_b [\frac{q_3 q_4}{p_3 p_4} + \frac{q_2 q_5}{p_2 p_5} + \frac{q_2 q_4}{p_2 p_4} + \frac{q_1 q_5}{p_1 p_5} + \frac{q_1 q_6}{p_1 p_6} + \frac{q_3 q_5}{p_3 p_5} + \frac{q_2 q_6}{p_2 p_6}] &= \Omega [p'_1 q'_2 p'_3 p'_a p'_b] \\
 p_1 p_2 p_4 p_5 p_a [1 - p_3 p_b - p_6 p_b + p_3 p_6 p_b] &= \Omega [p'_1 p'_2 p'_a (1 - p'_3 p'_b)] \\
 p_1 p_2 p_3 p_5 p_6 p_b [1 - p_1 p_a - p_4 p_a + p_1 p_4 p_a] &= \Omega [p'_2 p'_3 p'_b (1 - p'_1 p'_a)] \\
 \frac{p_a q_1 q_4}{q_a + p_a q_1 q_4} &= \frac{p'_a q'_1}{q'_a + p'_a q'_1} \\
 \frac{p_b q_3 q_6}{q_b + p_b q_3 q_6} &= \frac{p'_b q'_3}{q'_b + p'_b q'_3}
 \end{aligned} \right. \quad (54)$$

En résolvant le système (54) on obtient les relations (49) et (50) ci-dessus.

5. Algorithme

Début

Lecture des données d'entrées:

G : le graphe connexe non divisible (1 seule composante connexe)

$P_{i,j} = (E_i, E_j)$: Matrice associée construite à partir des arêtes du graphe

$K \subseteq V, |K| \geq 2$

$M = 1$

Tant que qu'il existe une réduction simple des 3 types suivants :

Appel procédures :

- Réduction Séries : $P_i = P_j \times P_k$, Supprimer le lien (E_i, E_j) et mettre à jour le vecteur des probabilité et la matrice associée au graphe.
- Réduction parallèle : $P_i = 1 - (1 - P_j) \times (1 - P_k)$; supprimer l'un des liens et mettre à jour la vecteur des probabilités et la matrice associée au graphe.
- Réduction degré 2. Soit $M = M \times \Omega$ pour chaque réduction.

Fin Tant que.

Commencer par explorer les structures complexes.

Soit S un tel sommet de départ.

Déterminer les sommets ascendants (et les sommets ascendants de deuxième niveau et de niveaux plus bas, selon le type de polygone)

Tant qu'un polygone existe faire

Si un polygone de type T existe appliquez la réduction de ce type. On commence toujours par chercher celui de type 1, puis de type 2, etc.

- Mémoriser dans une pile les liens à supprimer.
- Supprimer les liens dans la matrice associée au graphe.
- Reconstruire les nouvelles chaînes à partir des liens mémorisés en tissant les liens dans la matrice relative au graphe.
- Mettre à jour le vecteur des probabilités avec les nouvelles valeurs relatives à chaque type T.
- Appliquer les réductions série, parallèle et de degré 2.
- Mettre à jour le vecteur des probabilités.
- Mettre à jour la matrice relative au graphe.

Fin-Si

Fin tant que

Construire le graphe à partir de la matrice résultante.

- **Si** c'est une matrice simple qui mettez en relief une chaîne
Calculer la fiabilité comme le produit des probabilités des liens

Sinon

Imprimer matrice n'est plus décomposable

Appliquer un algorithme quelconque qui calcule la fiabilité (SDP, BDD, ...)

Fin-si

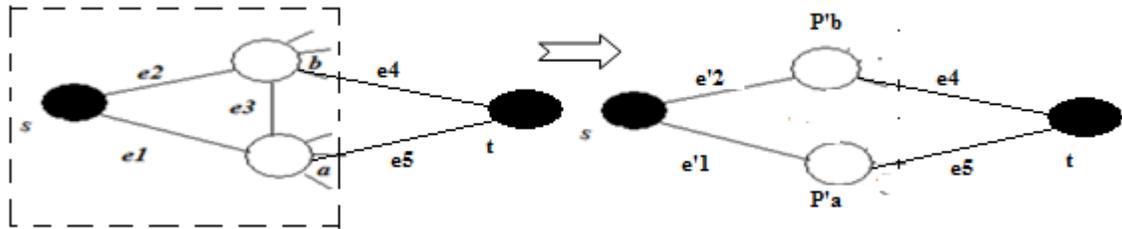
Imprimez la fiabilité

Fin algorithme

5.1. Exemples d'application

Exemple 1.

Reprenons l'exemple de la figure 6 tout en supposant que tous les nœuds sont imparfaits. Considérons que les probabilités de bon fonctionnement de chaque nœuds et de chaque lien est égal à 0.9. Le graphe suivant nous donne les étapes de calcul.



$$G = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ & e_3 \\ & & e_5 \\ & & & e_4 \end{bmatrix}; P - edge = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5); P - Nodes = (1, p_a, p_b, 1)$$

Etape 1:

Node_inital = S; Pile = Node_inital

Liste-succ(S) = (a, b)

Pile = Pile \cup Liste-succ(S) (donc Pile = (S, a, b))

X = dépiler(Pile) = (b)

Y = Liste-succ(X) = (a, t)

Si Y \neq 1_sommet_Terminal

Z = X \cap Pile = (b) \cap (S, a) = (a)

Donc Polygone de type 1 a été trouvé

Mise-à-jour des vecteurs et de la matrice

$$G = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ & & e_5 \\ & & & e_4 \end{bmatrix}; P - edge = (p_1 = \frac{\delta}{\delta+A.C}, p_2 = \frac{\delta}{\delta+B.D}, 0, p_4, p_5);$$

$$P - Nodes = (1, p_a = \frac{\delta+A.C}{\delta+A}, p_b = \frac{\delta+B.D}{\delta+B}, 1)$$

$X = \text{dépiler}(\text{Pile}) = (a)$

$Y = \text{Liste-succ}(X) = (t)$

Si $Y \neq 1_sommets_Terminal$

NON

$\text{Prob} = \text{Prob} \times \text{Prob}(X, t) = 1 \times p_5 = p_5$

$\text{Pile} = \text{dépiler}(\text{Pile}) = (S)$

$\text{Prob} = \text{Prob} \times \text{Prob}(\text{Pile}, X) = p_5 \times p_1 \times p_a$

Mise-à-jour des vecteurs et de la matrice

$e'_1 = (S, t)$

$$G = \begin{bmatrix} & e_2 & e'_1 \\ & & e_4 \end{bmatrix}; P - edge = (p_1 = \text{Prob}, p_2 = \frac{\delta}{\delta+B.D}, 0, p_4, 0);$$

$\text{Prob} = 1$

$\text{Liste-succ}(S) = (b)$

$\text{Pile} = \text{Pile} \cup \text{Liste-succ}(S)$ (donc $\text{Pile} = (S, b)$)

$X = \text{dépiler}(\text{Pile}) = (b)$

$Y = \text{Liste-succ}(X) = (t)$

Si $Y \neq 1_sommets_Terminal$

NON

$\text{Prob} = \text{Prob} \times \text{Prob}(X, t) = 1 \times p_4 = p_4$

$\text{Pile} = \text{dépiler}(\text{Pile}) = (S)$

$\text{Prob} = \text{Prob} \times \text{Prob}(\text{Pile}, X) = p_4 \times p_2 \times p_b$

Mise-à-jour des vecteurs et de la matrice

$e'_2 = (S, t)$

$$G = \begin{bmatrix} & e'_1 || e'_2 \end{bmatrix}; P - edge = (p_1 = \text{Prob}, p_2 = \text{Prob}, 0, 0, 0);$$

$P - edge = (p''_1 = 1 - (1 - q_1) \times (1 - q_1), 0, 0, 0, 0)$

Fin-si

Fin Algorithme

Calcul :

```
function imperfect()
```

```
    p1 = .9
```

```
    p2 = .9
```

```
    p3 = .9
```

```
    pa = .9
```

```
    pb = .9
```

```
    A = p2*pb*(1-p1*pa-p3*pa+p1*p3*pa)
```

```
    B = p1*pa*(1-p2*pb-p3*pb+p2*p3*pb)
```

```
    delta = pa*pb*(p1*p2+p1*p3+p2*p3-2*p1*p3*pa)
```

```
    C=(pa*(1-p1)*(1-p3))/((1-pa)+pa*(1-p1)*(1-p3))
```

```
    D=(pb*(1-p2)*(1-p3))/((1-pb)+pb*(1-p2)*(1-p3))
```

```
    omega = (delta + A)*(delta + B)/delta
```

```
    p1p = delta/(delta + A*C)
```

```
    p2p = delta/(delta + B*D)
```

```
    pap = (delta + A*C)/(delta + A)
```

```
    pbp = (delta + B*D)/(delta + B)
```

```
    x = 1-(1-p1p*pbp*.9)*(1-p2p*pap*.9)
```

```
    y = x*.81*omega
```

```
end
```

A = B = 0.08829; eta = 0.78732; C = D = 0.0825688073394495; p1p = p2p = 0.990825688073394; pap = pbp = 0.907493061979649; omega = 0.9738008333333333.

Comme le graphe s'est transformé en deux chaînes parallèles. La fiabilité est :

$$R = 1 - (1 - p2p * pbp * p4) * (1 - p1p * pap * p4) = 0.963614702184995$$

$$R(G) = R * \omega * P_s * P_t = 0.963614702184995 * 0.9738008333333333 * 0.9 * 0.9 = 0.760078728$$

Exemple 2.

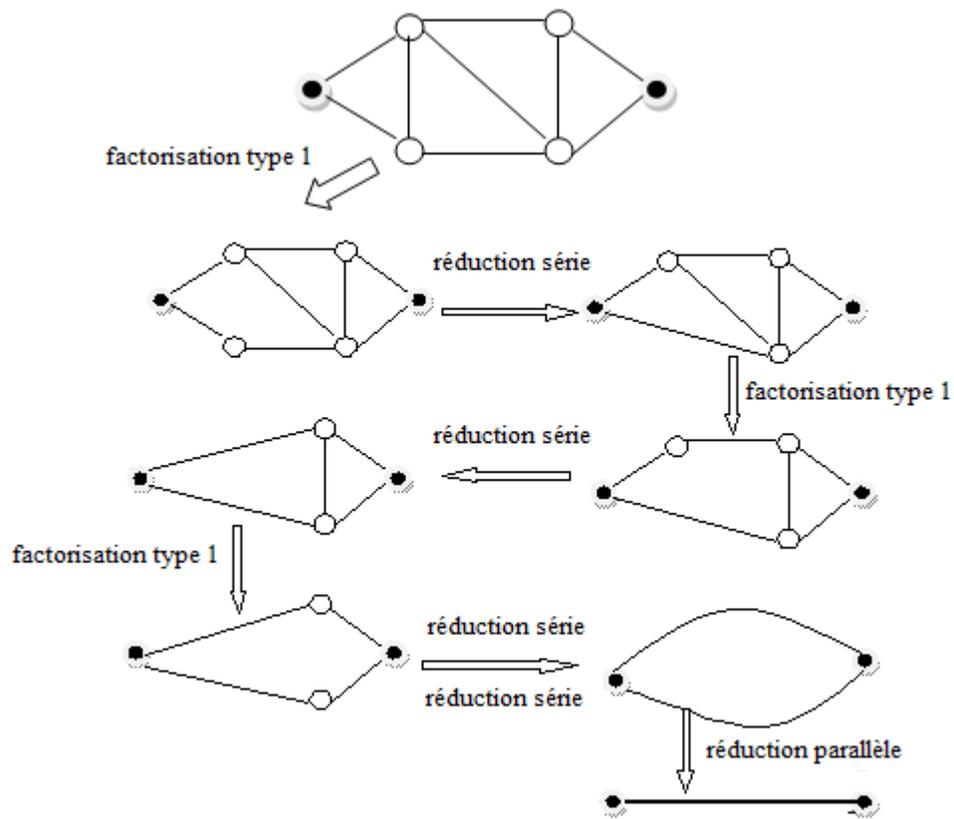


Figure 15. Réduction polygone-à chaîne de type 1, série et parallèle

Table 6. Réduction polygone-à chaîne de type 1 à 7 pour les réseaux imparfaits

		$\delta = p_a p_b [p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 - 2 p_1 p_2 p_3]$ $A = p_2 p_b [1 - p_1 p_a - p_3 p_a + p_1 p_3 p_a]$ $B = p_1 p_a [1 - p_2 p_b - p_3 p_b + p_2 p_3 p_b]$ $C = \frac{p_a q_1 q_3}{(q_a + p_a q_1 q_3)} \quad D = \frac{p_b q_2 q_3}{(q_b + p_b q_2 q_3)}$	$\Omega = \frac{(\delta + A)(\delta + B)}{\delta} \quad p_i = \frac{(\delta)}{(\delta + AC)}$ $p_2 = \frac{(\delta)}{(\delta + B.D)} \quad p_a = \frac{(\delta + AC)}{(\delta + A)}$ $p_b = \frac{(\delta + B.D)}{(\delta + B)}$
		$\delta = p_a p_b [p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 - 2 p_1 p_2 p_3]$ $A = p_2 p_b [1 - p_1 p_a - p_3 p_a + p_1 p_3 p_a]$ $B = p_1 p_a [1 - p_2 p_b - p_3 p_b + p_2 p_3 p_b]$ $C = \frac{p_a q_1 q_3}{(q_a + p_a q_1 q_3)} \quad D = \frac{p_b q_2 q_3}{(q_b + p_b q_2 q_3)}$	$\Omega = \frac{(\delta + A)(\delta + B)}{\delta} \quad p_i = \frac{(\delta)}{(\delta + AC)}$ $p_2 = \frac{(\delta)}{(\delta + B.D)} \quad p_a = \frac{(\delta + AC)}{(\delta + A)}$ $p_b = \frac{(\delta + B.D)}{(\delta + B)}$
		$\delta = p_1 p_2 p_3 p_4 p_a [1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{p_2} + \frac{q_3}{p_3} + \frac{q_4}{p_4}]$ $A = p_1 p_2 p_3 p_4 p_a [1 + \frac{q_1 q_4}{p_1 p_4} + \frac{q_2 q_3}{p_2 p_3} + \frac{q_1 q_3}{p_1 p_3}]$ $B = p_1 p_3 [1 - p_2 p_a - p_4 p_a + p_2 p_4 p_a]$ $C = \frac{p_a q_2 q_4}{(q_a + p_a q_2 q_4)}$	$\Omega = \frac{(\delta + A)(\delta + B)}{\delta} \quad p_i = \frac{(\delta)}{(\delta + AC)}$ $p_2 = \frac{(\delta)}{(\delta + B.C)} \quad p_a = \frac{(\delta + B.C)}{(\delta + B)}$
		$\gamma = p_1 p_2 p_3 p_4 p_a p_b [1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{p_2} + \frac{q_3}{p_3} + \frac{q_4}{p_4}]$ $B = p_1 p_2 p_3 p_4 p_a p_b [\frac{q_1 q_4}{p_1 p_4} + \frac{q_2 q_3}{p_2 p_3}]$ $A = p_2 p_4 p_b [1 - p_1 p_a - p_3 p_a + p_1 p_3 p_a]$ $\delta = p_1 p_3 p_a [1 - p_2 p_b - p_4 p_b + p_2 p_4 p_b]$ $C = \frac{p_a q_1 q_3}{(q_a + p_a q_1 q_3)}$ $D = \frac{p_b q_2 q_4}{(q_b + p_b q_2 q_4)}$	$\Omega = \frac{(\gamma + A)(\gamma + B)(\delta + \gamma)}{\gamma^2}$ $p_i = \frac{(\gamma)}{(\gamma + AC)} \quad p_2 = \frac{(\gamma)}{(\gamma + B)}$ $p_b = \frac{(\gamma + D\delta)}{(\gamma + \delta)} \quad p_3 = \frac{(\gamma)}{(\gamma + D\delta)}$ $p_a = \frac{(\gamma + AC)}{(\gamma + A)}$
		$\gamma = p_1 p_2 p_3 p_4 p_a p_b [1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{p_2} + \frac{q_3}{p_3} + \frac{q_4}{p_4}]$ $B = p_1 q_2 p_3 q_4 p_a p_b$ $A = p_2 p_3 p_b [1 - p_1 p_a - p_4 p_a + p_1 p_4 p_a]$ $\delta = p_1 p_2 p_a [1 - p_3 p_b - p_4 p_b + p_3 p_4 p_b]$ $C = \frac{p_a q_1 q_4}{(q_a + p_a q_1 q_4)}$ $D = \frac{p_b q_3 q_4}{(q_b + p_b q_3 q_4)}$	$\Omega = \frac{(\gamma + A)(\gamma + B)(\delta + \gamma)}{\gamma^2}$ $p_3 = \frac{(\gamma)}{(\gamma + D\delta)} \quad p_i = \frac{(\gamma)}{(\gamma + AC)}$ $p_b = \frac{(\gamma + D\delta)}{(\gamma + \delta)} \quad p_2 = \frac{(\gamma)}{(\gamma + B)}$ $p_a = \frac{(\gamma + AC)}{(\gamma + A)}$
		$\gamma = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_a p_b [1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{p_2} + \frac{q_3}{p_3} + \frac{q_4}{p_4} + \frac{q_5}{p_5}]$ $B = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_a p_b [\frac{q_3 q_4}{p_3 p_4} + \frac{q_2 q_5}{p_2 p_5} + \frac{q_2 q_4}{p_2 p_4} + \frac{q_1 q_5}{p_1 p_5}]$ $A = p_2 p_3 p_5 p_b [1 - p_1 p_a - p_4 p_a + p_1 p_4 p_a]$ $\delta = p_1 p_2 p_4 p_a [1 - p_3 p_b - p_5 p_b + p_3 p_5 p_b]$ $C = \frac{p_a q_1 q_4}{(q_a + p_a q_1 q_4)} \quad D = \frac{p_b q_3 q_5}{(q_b + p_b q_3 q_5)}$	$\Omega = \frac{(\gamma + A)(\gamma + B)(\delta + \gamma)}{\gamma^2} \quad p_i = \frac{(\gamma)}{(\gamma + AC)}$ $p_2 = \frac{(\gamma)}{(\gamma + B)} \quad p_3 = \frac{(\gamma)}{(\gamma + D\delta)}$ $p_a = \frac{(\gamma + AC)}{(\gamma + A)} \quad p_b = \frac{(\gamma + D\delta)}{(\gamma + \delta)}$
		$\gamma = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_a p_b [1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{p_2} + \frac{q_3}{p_3} + \frac{q_4}{p_4} + \frac{q_5}{p_5} + \frac{q_6}{p_6}]$ $B = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_a p_b [\frac{q_3 q_4}{p_3 p_4} + \frac{q_2 q_5}{p_2 p_5} + \frac{q_2 q_4}{p_2 p_4} + \frac{q_1 q_5}{p_1 p_5} + \frac{q_1 q_6}{p_1 p_6} + \frac{q_3 q_5}{p_3 p_5} + \frac{q_2 q_6}{p_2 p_6}]$ $A = p_2 p_3 p_5 p_6 p_b [1 - p_1 p_a - p_4 p_a + p_1 p_4 p_a]$ $\delta = p_1 p_2 p_4 p_5 p_a [1 - p_3 p_b - p_6 p_b + p_3 p_6 p_b]$ $C = \frac{p_a q_1 q_4}{(q_a + p_a q_1 q_4)} \quad D = \frac{p_b q_3 q_6}{(q_b + p_b q_3 q_6)}$	$\Omega = \frac{(\gamma + A)(\gamma + B)(\delta + \gamma)}{\gamma^2}$ $p_i = \frac{(\gamma)}{(\gamma + AC)} \quad p_2 = \frac{(\gamma)}{(\gamma + B)}$ $p_3 = \frac{(\gamma)}{(\gamma + D\delta)} \quad p_a = \frac{(\gamma + AC)}{(\gamma + A)}$ $p_b = \frac{(\gamma + D\delta)}{(\gamma + \delta)}$

5. Conclusion

La factorisation et la réduction sont des méthodes efficaces qui permettent l'évaluation de la fiabilité des réseaux indépendamment de leurs tailles et du nombre de nœuds terminaux. Nous avons démontré que même si les réseaux sont imparfaits ils peuvent aussi être décomposés tout autant que ceux qui possèdent des nœuds non-défaillants. L'algorithme développé dans le cadre de ce travail permet de calculer la fiabilité des réseaux après avoir appliqué des réductions simples et des réductions polygone-à chaîne. Nous avons montré par des manipulations élémentaires des probabilités conditionnelles sur les nœuds et les arêtes, comment construire une solution dont le temps d'exécution est à moindre coût. L'idée étant de choisir les arêtes dont l'une de leurs extrémités soit non-défaillante et l'ensemble des transformations nous conduit vers une structure simplifiée d'où l'on peut facilement calculer la fiabilité du réseau. Nous pouvons remarquer sans démonstration préalable que l'algorithme de calcul est polynomial et le nombre de réductions est fini. L'algorithme général et les calculs sur des benchmarks non pu être présentés dans ce travail, cela nécessite une programmation plus poussée pour une implémentation efficace. Aussi, comme perspective, nous envisageons d'étendre ce modèle vers d'autres structures plus complexes et d'écrire un programme plus efficace que celui déjà implémenté sous MatLab qui utilise des structures de données simples pour la mémorisation des calculs intermédiaires et des structures en décomposition.

Bibliographie

- Abraham, J. A., 1979, An improved algorithm for network reliability, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 28, pp. 58–61.
- Brace, K., Rudell, R. and Bryant, R., Efficient implementation of a BDD package, *Proceedings of the 27th ACM/IEEE Design Automation Conference*, pp. 40-45.
- Bryant, R., 1986, Graph based algorithms for boolean function manipulation, *IEEE Transactions on Computers*, Vol. 35, NO 8, pp. 677-691.
- Choi., Jun C.H, 1995, Some variants of polygon-to-reductions in evaluating reliability of undirected networks, *Microelectronics and Reliability*, Vol. 1, NO 35, pp. 1-11.

- Deo N. and Medidi M., 1992, Parallel algorithms for terminal-pair reliability, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 41, pp. 201-209.
- Dohmen, K., Inclusion-Exclusion and Network Reliability, *The electronic Journal of Combinatorics*, Vol. 5, N0 R36, 1998.
- Dotson, W. P. and Gobien, J. O., 1979, A new analysis technique for probabilistic graphs, *IEEE Transactions Circuits and Systems*, Vol. 26, pp. 855-865.
- FratTA, L. and Montanari, U. G., 1973, A boolean algebra method for computing the terminal reliability in a communication network, *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. 20, pp. 203-211.
- Hardy, G., Lucet, C., and Limnios, N., 2007, K-Terminal network reliability measures with binary decision diagrams, *IEEE Transaction on Reliability*, Vol. 56, NO. 3, pp. 506-515.
- Heidtmann, K.D., 1989, Smaller sums of disjoint products by subproduct inversion, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 38, pp. 305-311.
- Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1990, *IEEE Standard Computer Dictionary: A Compilation of IEEE Standard Computer Glossaries*, New York, NY, 1990.
- Kuo, S.Y., Yeh, F.M. and Lin, H.Y., 2007, Efficient and exact reliability evaluation for networks with imperfect vertices, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 56, pp. 288-298.
- Lin, H.Y., Kuo, S.Y. and Yeh, F.M., 2003, Minimal cutset enumeration and network reliability evaluation by recursive merge and BDD, *Proceedings of the Eighth IEEE International Symposium on Computers and Communication*, pp. 1530-1546.
- Liu, H. H., Yang, W. T. and Liu, C. C., 1993, An improved minimizing algorithm for the summation of disjoint products by Shannon's expansion, *Microelectronic Reliability*, Vol. 33, NO 4, pp. 599-613.
- Locks, M. O. and Wilson, J. M., 1992, Note on disjoint products algorithms, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 41, pp. 81-84.
- Misra. K.B., 1970, An algorithm for the reliability evaluation of redundant networks, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-9, pp. 146-151.

- Moore and Shannon, 1956, Reliable circuits using less reliable relay, *J. Franklin Insti.* 262, pp. 191-208..
- Moskowitz. F, 1958, The analysis of redundancy networks, *AIEE Trans. Commun. Electron.*, Vol 39, pp 627-632.
- Murchland. J., 1973, Calculating the probability that a graph is disconnected, Working paper NO. 18.
- Nakazawa. H., 1976, Bayesian decomposition method for computing reliability of oriented network, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol R-25, pp 77-80.
- Page, L.B. and Perry, J.E., 1988, A Practical Implementation of the factoring theorem for network reliability, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 37, pp 259-267.
- Page, L.B. and Perry, J.E., 1989, Reliability of directed network using the factoring theorem, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 38, pp 556-562.
- Rebaiaia M-L, Ait-Kadi D. and Merlano. A., 2009, A Practical Algorithm for network reliability evaluation based on the factoring theorem — A case study of A generic Radio-communication network, *Journal of Quality*, Vol. 16, N0 5, pp 323-335.
- Rebaiaia M-L, A Contributions to the evaluation and optimization of networks reliability, Ph.D thesis, Laval University, 2011.
- Rebaiaia Mohamed-Larbi, Ait-Kadi Daoud, Denis Page, A Practical Method for Evaluating the Reliability of Telecommunication, *Network Networked Digital Technologies, Communications in Computer and Information Science*, Volume 293, Part 3, 63-77, LNCS, Springer, 2012.
- Rebaiaia Mohamed-Larbi, Ait-Kadi Daoud, An efficient Algorithm for Enumerating Minimal PathSets in Communication Networks, *Networked Digital Technologies, Communications in Computer and Information Science*, , Volume 293, Part 8, 444-458, LNCS, Springer, 2012.
- Rebaiaia Mohamed-Larbi, Ait-Kadi Daoud, Algorithms for Generating Minimal Cutsets in R-Networks, *IFAC-PapersOnLine*, Editor: Dolgui Alexandre & Borangui Theodor, *Information Control Problems in Manufacturing*, Volume # 14, Part# 1, *IFAC-PapersOnLine.net*, Elsevier, ISSN: 1474-6670, 2012.

- Rebaiaia Mohamed-Larbi and Ait-Kadi, Daoud, Model based binary decision diagrams for complex networks reliability optimization, IFAC-PapersOnLine, Editor: Milik, Adam, Hryniewicz, Edward, Programmable Devices and Embedded Systems, Volume # 10, Part# 1, IFAC-PapersOnLine.net, Elsevier, ISSN: 1474-6670, 2010.
- Rebaiaia Mohamed-Larbi, Daoud Ait-Kadi and Arturo Merlano, A methodology for modeling and evaluating the reliability of a radio-communication network, Advanced Maintenance Engineering, Volume # 1, Part# 1, IFAC-PapersOnLine.net, Elsevier, ISSN: 1474-6670, 2010.
- Resende, M.G.C., 1986, A program for reliability evaluation of undirected networks via polygon-to-chain reductions, *IEEE Transaction on Reliability*, Vol. R-35, pp 24-29.
- Rosenthal. A., 1974, Computing reliability of complex systems, PhD Thesis, University of California, Berkely.
- Rudell, R., 1993, Dynamic variable ordering for ordered binary decision diagrams, *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Aided Design*, pp 42-47.
- Satyanarayana. A., Chang M., 1983, Network reliability and the factoring theorems, *Networks*, Vol 13, pp 107-120.
- Satyanarayana. A., Wood. R.K, 1985, A linear-time algorithm for computing K-terminal reliability in series-parallel networks, *SIAM J. computing*, Vol 14, pp 818-832.
- Sheng-DeWang and Cha-HonSun, 1996, Transformations of star-delta and delta-star reliability networks, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 1, NO 45, pp 120-126.
- Simard, C., 1996, *Contribution au problème d'évaluation de la fiabilité des réseaux*, Mémoire de Maîtrise Sciences, Laval University, Québec, Canada. TJ-7.5-UL-1996.
- Tarjan, R.E., 1972, Depth first search and linear graph algorithms, *SIAM Journal of Computing*, Vol. 1, pp 146-160.
- Theolougou, R., and Carlier, J.G., 1991, Factoring & Reduction for networks with imperfect vertices, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 40, pp 210-217.
- Valian, L.G., 1979, The Complexity of enumerating and reliability problems, *SIAM Journal of Computing*, Vol. 8, pp 410-421.

- Wood, R. K.. 1986, Factoring algorithms for computing K-terminal network reliability, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-35, pp 269-278.
- Yan, L., and Taha, H. A., 1994, A recursive approach for enumerating minimal cutsets in a network, *IEEE Transaction on Reliability*, Vol. 43, pp 383-388.
- Yoo Y. B. and Narsingh Deo, 1988, A Comparison of algorithms for terminal-Pair reliability, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 2, NO. 37, pp 210-215.